Devoir Maison 7

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (vendredi 22 novembre).

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \longmapsto t\,\mathrm{sh}(t)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' + \mathrm{th}(t)y = t\,\mathrm{th}(t)$$

Exercice 2 (mardi 26 novembre).

Soit $(G, *)$ un groupe. On note S_G l'ensemble des applications $f \in G^G$ bijectives.

Pour tout $g \in G$, on considère l'application :

$$\tau_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g * x * g^{-1} \end{array} \right.$$

1. Montrer que, pour tout $g \in G$, l'application τ_g est un morphisme de groupes.
2. Soient $g, g' \in G$.
   (a) Montrer que $\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g*g'}$.
   (b) Montrer que τ_g est bijective et déterminer son application réciproque.
3. On appelle ensemble des *automorphismes intérieurs de* G, noté $\mathrm{Int}(G)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Int}(G) = \left\{\tau_g \,\middle|\, g \in G\right\}$$

   Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $(S_G, \circ)$.
4. On appelle *centre du groupe* G, noté $Z(G)$, l'ensemble :

$$Z(G) = \left\{g \in G \,\middle|\, \forall h \in G,\ g * h = h * g\right\}$$

   (a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
   (b) Expliciter τ_g si $g \in Z(G)$.