

DEVOIR MAISON 7

un corrigé

Exercice 1 (équation différentielle).

1. La fonction f est continue sur \mathbb{R} comme produit de fonctions qui le sont. D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(t) dt \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons l'intégrale $F(x) = \int_0^x t \operatorname{sh}(t) dt$ en utilisant une intégration par parties. Posons :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \operatorname{sh}(t) & v(t) &= t \\ u(t) &= \operatorname{ch}(t) & v'(t) &= 1 \end{aligned}$$

On a :

$$F(x) = \left[t \operatorname{ch}(t) \right]_0^x - \int_0^x \operatorname{ch}(t) dt = x \operatorname{ch}(x) - \left[\operatorname{sh}(t) \right]_0^x = x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$$

Ainsi :

une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction $F : x \mapsto x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$

2. L'équation différentielle proposée est linéaire du premier ordre.

- ★ Une primitive de la fonction $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ sur \mathbb{R} est $t \mapsto \ln(|\operatorname{ch}(t)|)$, i.e. $t \mapsto \ln(\operatorname{ch}(t))$ (car ch est à valeurs strictement positives). Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) est :

$$\left\{ t \mapsto C e^{-\ln(\operatorname{ch}(t))} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \mapsto \frac{C}{\operatorname{ch}(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

- ★ Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $y : t \mapsto \frac{C(t)}{\operatorname{ch}(t)}$. La fonction y est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = \frac{C'(t) \operatorname{ch}(t) - C(t) \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + \operatorname{th}(t)y(t) = t \operatorname{th}(t)) \\ &\iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, \frac{C'(t) \operatorname{ch}(t) - C(t) \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} + \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} \times \frac{C(t)}{\operatorname{ch}(t)} = t \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} \right) \\ &\iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, \frac{C'(t)}{\operatorname{ch}(t)} - C(t) \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} + C(t) \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} = t \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} \right) \\ &\iff (\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = t \operatorname{sh}(t)) \end{aligned}$$

D'après la question 1., il suffit de choisir $C : t \mapsto t \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t)$. Une solution de (E) sur \mathbb{R} est donc¹ la fonction $t \mapsto t - \operatorname{th}(t)$.

Finalement :

1. On divise la fonction C par la fonction th .

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ t \mapsto t - \text{th}(t) + \frac{C}{\text{ch}(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 2 (automorphismes intérieurs).

1. Soit $g \in G$. Pour tous $x, y \in G$, on a d'une part :

$$\tau_g(x * y) = g * (x * y) * g^{-1} = g * x * y * g^{-1} \quad (\text{par associativité de la loi } *)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \tau_g(x) * \tau_g(y) &= (g * x * g^{-1}) * (g * y * g^{-1}) \\ &= g * x * g^{-1} * g * y * g^{-1} \quad (\text{par associativité de la loi } *) \\ &= g * x * e * y * g^{-1} \quad (\text{en notant } e \text{ l'élément neutre de } G) \\ &= \tau_g(x * y) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } g \in G, \text{ l'application } \tau_g \text{ est un morphisme du groupe } G}$$

2. (a) Soient $g, g' \in G$. Pour tout $x \in G$, on a :

$$\begin{aligned} (\tau_g \circ \tau_{g'})(x) &= \tau_g(\tau_{g'}(x)) = \tau_g(g' * x * (g')^{-1}) = g * (g' * x * (g')^{-1}) * g^{-1} \\ &= (g * g') * x * ((g')^{-1} * g^{-1}) \quad (\text{par associativité de } *) \\ &= (g * g') * x * (g * g')^{-1} \quad (\text{propriété de l'inverse}) \\ &= \tau_{g * g'}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g * g'}$. Finalement :

$$\boxed{\forall g, g' \in G, \quad \tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g * g'}}$$

(b) On remarque que $\tau_e = \text{Id}_G$. En effet, on sait que $e^{-1} = e$ donc :

$$\forall x \in G, \quad \tau_e(x) = e * x * e^{-1} = x * e = x$$

Soit $g \in G$. Alors $g^{-1} \in G$ (puisque G est un groupe) et, d'après la question précédente, on a :

$$\tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{g * g^{-1}} = \tau_e = \text{Id}_G \quad \text{et, de la même manière} \quad \tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = \text{Id}_G$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout } g \in G, \text{ l'application } \tau_g \text{ est bijective et } (\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}}$$

3. Montrons que $(\text{Int}(G), \circ)$ est un sous-groupe de (S_G, \circ) (S_G étant l'ensemble des applications bijectives de G sur G).

★ Tout d'abord, $\text{Int}(G) \neq \emptyset$ car on sait que $\text{Id}_G = \tau_e \in \text{Int}(G)$. Par ailleurs, on sait d'après la question 2.(b) que tout élément de $\text{Int}(G)$ est une application bijective de G sur G , *i.e.* est un élément de S_G . Ainsi, $\text{Int}(G) \subset S_G$.

★ Soient $\varphi, \psi \in \text{Int}(G)$. Il existe $g, h \in G$ tels que $\varphi = \tau_g$ et $\psi = \tau_h$. En utilisant les questions 2.(b) puis 2.(a), on a :

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \tau_g \circ (\tau_h)^{-1} = \tau_g \circ \tau_{h^{-1}} = \tau_{g * h^{-1}}$$

On a bien $g * h^{-1}$ (par structure de groupe de G) donc $\varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Int}(G)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Int}(G) \text{ est un sous-groupe de } (S_G, \circ)}$$

4. (a) Montrons que $(Z(G), *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

★ Tout d'abord, $Z(G) \neq \emptyset$ car $e \in Z(G)$ (en effet, par définition de l'élément neutre dans un groupe, on sait que pour tout $g \in G$, on a $g * e = g = e * g$). Par ailleurs, on a clairement $Z(G) \subset G$ (par définition de $Z(G)$).

★ Soient $g, g' \in Z(G)$. Montrons que $g * g' \in Z(G)$. Soit $h \in G$. On a (en utilisant l'associativité de $*$ à la première égalité :

$$\begin{aligned} (g * g') * h &= g * (g' * h) = g * (h * g') && \text{(car } g' \in Z(G)) \\ &= (g * h) * g' && \text{(en utilisant l'associativité de la loi } *) \\ &= (h * g) * g' && \text{(car } g \in Z(G)) \\ &= h * (g * g'), \end{aligned}$$

à nouveau par associativité de la loi $*$.

★ Soit $g \in Z(G)$. Montrons que $g^{-1} \in Z(G)$. Soit $h \in G$. Par hypothèse, on a $g * h = h * g$. En composant à gauche et à droite par g^{-1} , on obtient :

$$g^{-1} * (g * h) * g^{-1} = g^{-1} * (h * g) * g^{-1}$$

et donc, en utilisant l'associativité de la loi $*$, il vient :

$$(g^{-1} * g) * h * g^{-1} = g^{-1} * h * (g * g^{-1}) \quad \text{i.e.} \quad e * h * g^{-1} = g^{-1} * h * e,$$

soit encore $h * g^{-1} = g^{-1} * h$. Ainsi, $g^{-1} \in Z(G)$.

Finalement :

$$\boxed{Z(G) \text{ est un sous-groupe de } G}$$

(b) Soit $g \in Z(G)$. Pour tout $x \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \tau_g(x) &= g * x * g^{-1} = x * g * g^{-1} && \text{(car, par hypothèse, on a } g \in Z(G)) \\ &= x * e \\ &= x \end{aligned}$$

Autrement dit, $\tau_g = \text{Id}_G$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } g \in Z(G), \text{ on a l'égalité } \tau_g = \text{Id}_G}$$