Devoir Maison 7

un corrigé

Exercice 1 (équation différentielle).

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties. Posons :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \mathrm{sh}(t) & v(t) = t \\ u(t) = \mathrm{ch}(t) & v'(t) = 1 \end{array}$$

On a :

$$F(x) = \Big[t\,\mathrm{ch}(t)\Big]_0^x - \int_0^x \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{ch}(x) - \Big[\mathrm{sh}(t)\Big]_0^x = x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est la fonction } F : x \longmapsto x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}$$

2. L'équation différentielle proposée est linéaire du premier ordre.
   - ⋆ Une primitive de la fonction $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \longmapsto \ln(|\mathrm{ch}(t)|)$, *i.e.* $t \longmapsto \ln(\mathrm{ch}(t))$ (car ch est à valeurs strictement positives). Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) est :

   $$\left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(t))} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \longmapsto \frac{C}{\mathrm{ch}(t)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

   - ⋆ Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $y : t \longmapsto \dfrac{C(t)}{\mathrm{ch}(t)}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = \frac{C'(t)\,\mathrm{ch}(t) - C(t)\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)^2}$$

   donc :

   $$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + \mathrm{th}(t)y(t) = t\,\mathrm{th}(t)) \\ &\iff \left(\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{C'(t)\,\mathrm{ch}(t) - C(t)\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)^2} + \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)} \times \frac{C(t)}{\mathrm{ch}(t)} = t\,\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\right) \\ &\iff \left(\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{C'(t)}{\mathrm{ch}(t)} - C(t)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)^2} + C(t)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)^2} = t\,\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\right) \\ &\iff (\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = t\,\mathrm{sh}(t)) \end{aligned}$$

   D'après la question 1., il suffit de choisir $C : t \longmapsto t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t)$. Une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc [1] la fonction $t \longmapsto t - \mathrm{th}(t)$.

   Finalement :

1. On divise la fonction C par la fonction th.

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ t \longmapsto t - \text{th}(t) + \frac{C}{\text{ch}(t)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 2 (automorphismes intérieurs).

1. Soit $g \in G$. Pour tous $x, y \in G$, on a d'une part :

$$\tau_g(x * y) = g * (x * y) * g^{-1} = g * x * y * g^{-1} \qquad \text{(par associativité de la loi } *)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \tau_g(x) * \tau_g(y) &= (g * x * g^{-1}) * (g * y * g^{-1}) \\ &= g * x * g^{-1} * g * y * g^{-1} \qquad \text{(par associativité de la loi } *) \\ &= g * x * e * y * g^{-1} \qquad \text{(en notant } e \text{ l'élément neutre de } G) \\ &= \tau_g(x * y) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } g \in G, \text{ l'application } \tau_g \text{ est un morphisme du groupe } G}$$

2. (a) Soient $g, g' \in G$. Pour tout $x \in G$, on a :

$$\begin{aligned} (\tau_g \circ \tau_{g'})(x) = \tau_g(\tau_{g'}(x)) = \tau_g(g' * x * (g')^{-1}) &= g * (g' * x * (g')^{-1}) * g^{-1} \\ &= (g * g') * x * \big((g')^{-1} * g^{-1}\big) \qquad \text{(par associativité de } *) \\ &= (g * g') * x * (g * g')^{-1} \qquad \text{(propriété de l'inverse)} \\ &= \tau_{g*g'}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g*g'}$. Finalement :

$$\boxed{\forall g, g' \in G, \qquad \tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g*g'}}$$

(b) On remarque que $\tau_e = \text{Id}_G$. En effet, on sait que $e^{-1} = e$ donc :

$$\forall x \in G, \qquad \tau_e(x) = e * x * e^{-1} = x * e = x$$

Soit $g \in G$. Alors $g^{-1} \in G$ (puisque G est un groupe) et, d'après la question précédente, on a :

$$\tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{g*g^{-1}} = \tau_e = \text{Id}_G \qquad \text{et, de la même manière} \qquad \tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = \text{Id}_G$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout } g \in G, \text{ l'application } \tau_g \text{ est bijective et } (\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}}$$

3. Montrons que $(\text{Int}(G), \circ)$ est un sous-groupe de $(S_G, \circ)$ (S_G étant l'ensemble des applications bijectives de G sur G).
   - ⋆ Tout d'abord, $\text{Int}(G) \neq \varnothing$ car on sait que $\text{Id}_G = \tau_e \in \text{Int}(G)$. Par ailleurs, on sait d'après la question 2.(b) que tout élément de $\text{Int}(G)$ est une application bijective de G sur G, *i.e.* est un élément de S_G. Ainsi, $\text{Int}(G) \subset S_G$.
   - ⋆ Soient $\varphi, \psi \in \text{Int}(G)$. Il existe $g, h \in G$ tels que $\varphi = \tau_g$ et $\psi = \tau_h$. En utilisant les questions 2.(b) puis 2.(a), on a :

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \tau_g \circ (\tau_h)^{-1} = \tau_g \circ \tau_{h^{-1}} = \tau_{g*h^{-1}}$$

   On a bien $g * h^{-1}$ (par structure de groupe de G) donc $\varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Int}(G)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Int}(G) \text{ est un sous-groupe de } (S_G, \circ)}$$

4. (a) Montrons que $(Z(G), *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

   - ⋆ Tout d'abord, $Z(G) \neq \varnothing$ car $e \in Z(G)$ (en effet, par définition de l'élément neutre dans un groupe, on sait que pour tout $g \in G$, on a $g * e = g = e * g$). Par ailleurs, on a clairement $Z(G) \subset G$ (par définition de $Z(G)$).
   - ⋆ Soient $g, g' \in Z(G)$. Montrons que $g * g' \in Z(G)$. Soit $h \in G$. On a (en utilisant l'associativité de $*$ à la première égalité :

$$\begin{aligned}(g * g') * h = g * (g' * h) &= g * (h * g') && \text{(car } g' \in Z(G)\text{)}\\ &= (g * h) * g' && \text{(en utilisant l'associativité de la loi } *\text{)}\\ &= (h * g) * g' && \text{(car } g \in Z(G)\text{)}\\ &= h * (g * g'),\end{aligned}$$

   à nouveau par associativité de la loi $*$.
   - ⋆ Soit $g \in Z(G)$. Montrons que $g^{-1} \in G$. Soit $h \in G$. Par hypothèse, on a $g * h = h * g$. En composant à gauche et à droite par g^{-1}, on obtient :

$$g^{-1} * (g * h) * g^{-1} = g^{-1} * (h * g) * g^{-1}$$

   et donc, en utilisant l'associativité de la loi $*$, il vient :

$$(g^{-1} * g) * h * g^{-1} = g^{-1} * h * (g * g^{-1}) \qquad \textit{i.e.} \qquad e * h * g^{-1} = g^{-1} * h * e,$$

   soit encore $h * g^{-1} = g^{-1} * h$. Ainsi, $g^{-1} \in Z(G)$.

   Finalement :

$$\boxed{Z(G) \text{ est un sous-groupe de } G}$$

   (b) Soit $g \in Z(G)$. Pour tout $x \in G$, on a :

$$\begin{aligned}\tau_g(x) = g * x * g^{-1} &= x * g * g^{-1} && \text{(car, par hypothèse, on a } g \in Z(G)\text{)}\\ &= x * e\\ &= x\end{aligned}$$

   Autrement dit, $\tau_g = \mathrm{Id}_G$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } g \in Z(G) \text{, on a l'égalité } \tau_g = \mathrm{Id}_G}$$