

DEVOIR MAISON 7

un corrigé

Exercice 1 (l'équation de Pell-Fermat).

Partie I : étude de $(G, \star)$

1. (a) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}(ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 &= a^2c^2 + 4abcd + 4b^2d^2 - 2(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 4b^2d^2$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)$$

- (b) Soient $(a, b), (c, d) \in G$. Montrons que $(a, b) \star (c, d) \in G$. Par définition de $\star$, on a :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

car toute somme ou produit d'entiers est un entier. D'après la question précédente, on a de plus :

$$(ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = 1 \times 1 = 1$$

car (a, b) et (c, d) sont des éléments de G . Ainsi, $(a, b) \star (c, d) \in G$. On peut donc conclure que :

$$\star \text{ est une loi de composition interne sur } G$$

2. Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in G$.

- On a :

$$(c, d) \star (a, b) = (ca + 2db, da + cb) = (ac + 2bd, ad + bc) = (c, d) \star (a, b)$$

par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\text{la loi } \star \text{ est commutative}$$

- De plus, on a d'une part :

$$\begin{aligned}((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) &= (ac + 2bd, ad + bc) \star (e, f) \\ &= ((ac + 2bd)e + 2(ad + bc)f, (ac + 2bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf, acf + 2bdf + ade + bce)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(a, b) \star ((c, d) \star (e, f)) &= (a, b) \star (ce + 2df, cf + de) \\ &= (a(ce + 2df) + 2b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + 2df)) \\ &= (ace + 2adf + 2bcf + 2bde, acf + ade + bce + 2bdf) \\ &= ((a, b) \star (c, d)) \star (e, f)\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\text{la loi } \star \text{ est associative}$$

3. Remarquons que le couple $(1, 0)$ appartient à G car $(1, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $1^2 - 2 \times 0^2 = 1$. De plus, pour tout $(a, b) \in G$, on a :

$$(a, b) \star (1, 0) = (a \times 1 + 2b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a, b),$$

et, comme le magma $(G, \star)$ est commutatif, on a aussi $(1, 0) \star (a, b) = (a, b)$. Ainsi :

$$\text{le magma } (G, \star) \text{ admet le couple } (1, 0) \text{ comme élément neutre}$$

4. Soit $(a, b) \in G$. On a :

$$(a, b) \star (a, -b) = (a^2 - 2b^2, a \times (-b) + b \times a) = (1, 0)$$

car $a^2 - 2b^2 = 1$ puisque $(a, b) \in G$. Ainsi :

$$\boxed{\forall (a, b) \in G, \quad (a, b) \star (a, -b) = (1, 0)}$$

5. Tout d'abord, l'ensemble G est non vide (car il contient $(1, 0)$). Ensuite :

- la loi $\star$ est associative et commutative dans G ;
- on sait que le magma $(G, \star)$ admet un élément neutre (à savoir $(1, 0)$) ;
- enfin, d'après la question précédente, tout élément de G est inversible pour la loi $\star$. En effet, pour tout $(a, b) \in G$:
 - on a bien $(a, -b) \in G$ car $a^2 - 2(-b)^2 = a^2 - 2b^2 = 1$;
 - et la relation $(a, b) \star (a, -b) = (1, 0)$ établie à la question précédente entraîne que $(a, -b) \star (a, b) = (1, 0)$ par commutativité de la loi.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{(G, \star) \text{ est un groupe abélien}}$$

Partie II : étude des itérés d'un élément de G

6. (a) Soit $b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(1, b) \in G \iff 1^2 - 2b^2 = 1 \iff b^2 = 0 \iff b = 0$$

donc :

$$\boxed{\text{le seul élément de } G \text{ de la forme } (1, b) \text{ (où } b \in \mathbb{Z}) \text{ est l'élément neutre } (1, 0)}$$

(b) Soit $b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(2, b) \in G \iff 4 - 2b^2 = 1 \iff 2b^2 = 3,$$

ce qui n'est pas possible car 3 n'est pas un nombre pair. Donc :

$$\boxed{G \text{ ne contient pas d'élément de la forme } (2, b) \text{ où } b \in \mathbb{Z}}$$

7. On a $(3, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $3^2 - 2 \times 2^2 = 9 - 8 = 1$ donc :

$$\boxed{\text{le couple } x = (3, 2) \text{ est un élément de } G}$$

8. D'une part, on a $x^0 = (1, 0)$ et d'autre part, on sait que $x^0 = (a_0, b_0)$ (par définition des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$). En identifiant les coordonnées, on a bien :

$$\boxed{a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 0}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Par définition de x^{n+1} , on a :

$$x^{n+1} = x^n \star x = (a_n, b_n) \star (3, 2) = (3a_n + 2 \times b_n \times 2, 2a_n + 3b_n) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$$

Par ailleurs, on sait que $x^{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$ donc, par identification, on a bien les deux égalités annoncées. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 3b_n \end{cases}}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1}$ (d'après la première relation de récurrence établie). En utilisant la seconde, il vient :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4(2a_n + 3b_n) = 3a_{n+1} + 8a_n + 12b_n$$

Or on a $4b_n = a_{n+1} - 3a_n$ donc :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 8a_n + 3(a_{n+1} - 3a_n) = 6a_{n+1} - a_n$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n}$$

10. On utilise un raisonnement par récurrence double.

★ On sait que $a_0 = 1$ (et $b_0 = 0$) donc, d'après la question 8., on a $a_1 = 3 \times 1 + 4 \times 0 = 3$. D'autre part, on a :

$$\frac{(3 - 2\sqrt{2})^0 + (3 + 2\sqrt{2})^0}{2} = 1 = a_0 \quad \text{et} \quad \frac{(3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2})}{2} = 3 = a_1$$

donc les égalités sont vraies pour $n \in \{0, 1\}$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$a_n = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

Montrons que $a_{n+2} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+2} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+2}}{2}$. D'après la question 9., on a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 6a_{n+1} - a_n = 6 \times \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}}{2} - \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n (6(3 - 2\sqrt{2}) - 1) + (3 - 2\sqrt{2})^n (6(3 + 2\sqrt{2}) - 1)}{2} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n (17 - 12\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})^n (17 + 12\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

Or on a $(3 \pm 2\sqrt{2})^2 = 17 \pm 12\sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^2 + (3 + 2\sqrt{2})^n (3 + 2\sqrt{2})^2}{2} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+2} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+2}}{2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 2$.

Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2}}$$

Remarque : la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant récurrente linéaire d'ordre 2, on peut aussi trouver son terme général en résolvant l'équation caractéristique associée.

Exercice 2 (étude d'une suite implicite).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et inverse de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} + n$$

puis :

$$\begin{aligned} f''_n(x) &= -\frac{e^x(1 + e^x)^2 - 2e^x \times e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} = -\frac{(1 + e^x)(e^x + e^{2x} - 2e^{2x})}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x}{(1 + e^x)^3} \\ &= \frac{e^x}{(1 + e^x)^3} (e^x - 1) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{e^x}{(1 + e^x)^3} > 0$ (comme quotient de nombres strictement positifs) et :

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit les tableaux de signes et de variations suivants (les limites de f'_n et f_n en $+\infty$ et $-\infty$ sont immédiates et $n - \frac{1}{4} > 0$ puisque $n \geq 1$ par hypothèse) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''_n(x)$	$-$	0	$+$
f'_n	n	$n - \frac{1}{4} > 0$	n
$f'_n(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$		$+\infty$

Concernant les limites de f_n sur $\mathbb{R}$, on a en effet $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty$ tandis que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} nx = \pm\infty$, d'où les limites annoncées d'après les propriétés sur les quotients et sommes de limites.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'_n(x) \geq n - \frac{1}{4} > 0$ donc :

la fonction f_n est *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 1.). D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle :

$$f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Comme $0 \in f_n(\mathbb{R})$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien une unique solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{n}}} - 1$$

Or $e^{-\frac{1}{n}} > 0$ puis $1 + e^{-\frac{1}{n}} > 1$ et donc, comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{n}}} < 1$ ce qui implique que $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < 0$. Par ailleurs :

$$f_n(0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} > 0$$

On en déduit donc que $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$ (puisque $f_n(u_n) = 0$ par définition de u_n). Or la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $-\frac{1}{n}, u_n, 0 \in \mathbb{R}$ donc on peut conclure que :

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + (n+1)x - \left(\frac{1}{1 + e^x} + nx \right) = x \leq 0$$

puisque $x \in \mathbb{R}_-$. En évaluant cette inégalité en u_n on a, puisque $u_n \leq 0$ (d'après la question 3.) :

$$f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \leq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_{n+1}(u_n) \leq 0$$

car $f_n(u_n) = 0$ par définition de u_n . Or on a aussi $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (par définition de u_{n+1}) donc :

$$f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$$

On sait par ailleurs que la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}$ donc on a l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante. De plus, cette suite est majorée par 0 d'après la question 3. Le théorème de la limite monotone permet alors de conclure que :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente

5. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 0$. Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes :

la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente de limite 0

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$ donc :

$$\frac{1}{1 + e^{u_n}} + nu_n = 0 \quad \text{et donc} \quad nu_n = -\frac{1}{1 + e^{u_n}} \quad (1)$$

D'après la question 6., la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite 0 donc (par composition des limites et continuité de la fonction exponentielle en 0) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{1 + e^{u_n}} = -\frac{1}{2}$$

On déduit de (1) la limite demandée :

$$nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{1}{2}$$