

DEVOIR MAISON 7

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- **Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.**

Exercice 1 (l'équation de Pell-Fermat).

On considère l'équation suivante (appelée équation de Pell-Fermat) :

$$a^2 - 2b^2 = 1,$$

d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous allons nous intéresser dans un premier temps à la structure algébrique de l'ensemble des solutions de cette équation. On note alors G l'ensemble des solutions de cette équation, *i.e.* :

$$G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 2b^2 = 1\}$$

On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une opération notée $\star$ et définie par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (a, b) \star (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

Partie I : étude de $(G, \star)$

1. (a) Montrer que :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)$$

- (b) En déduire que $\star$ est une loi de composition interne sur G .

2. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative dans G .
3. Montrer que $(G, \star)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
4. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in G, \quad (a, b) \star (a, -b) = (1, 0)$$

5. Conclure que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Partie II : étude des itérés d'un élément de G

6. (a) Déterminer les éléments de G de la forme $(1, b)$ où $b \in \mathbb{Z}$.
(b) Déterminer les éléments de G de la forme $(2, b)$ où $b \in \mathbb{Z}$.
7. On pose $x = (3, 2)$. Justifier que $x \in G$.

Pour tout entier naturel n , on note x^n la puissance n^e de x dans le groupe $(G, \star)$. On rappelle que :

$$x^0 = (1, 0) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} = x^n \star x)$$

Pour tout entier naturel n , comme x^n appartient à G , on note $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le couple d'entiers tels que $x^n = (a_n, b_n)$.

8. Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

Indication : il n'est pas nécessaire de faire une récurrence ici.

9. En utilisant ces deux relations de récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$$

Indication : il n'est pas nécessaire de faire une récurrence ici.

10. Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2}$$

Exercice 2 (étude d'une suite implicite).

Soit n un entier naturel non nul. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe un unique nombre réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $\frac{-1}{n} < u_n < 0$.
4. Étudier le signe de $f_{n+1} - f_n$ sur $\mathbb{R}_-$ puis comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
6. Déterminer la limite de la suite $(nu_n)_{n \geq 1}$.