

DEVOIR MAISON 6

un corrigé

Exercice.

1. (a) Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$, tandis que $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\cos(x) \leq 1$ donc $5 - 4\cos(x) \geq 1 > 0$. On en déduit donc que :

la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$

- (b) Les racines du polynôme du second degré P sont $\frac{1}{2}$ et 2 . On en déduit le signe de P sur $\mathbb{R}$ suivant :

y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$P(y)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- (c) Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur cet ensemble. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto 5 - 4\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Par composition et quotient de fonctions dérivables, on peut conclure que :

la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\sqrt{5-4\cos(x)} - \sin(x) \times \frac{4\sin(x)}{2\sqrt{5-4\cos(x)}}}{5-4\cos(x)} = \frac{\cos(x)(5-4\cos(x)) - 2\sin(x)^2}{\sqrt{5-4\cos(x)}(5-4\cos(x))} = \frac{-2\cos(x)^2 + 5\cos(x) - 2}{\sqrt{5-4\cos(x)}(5-4\cos(x))}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{P(\cos(x))}{\sqrt{5-4\cos(x)}(5-4\cos(x))}$$

- (d) Soit $x \in [0, \pi]$. On sait que $\sqrt{5-4\cos(x)}(5-4\cos(x)) \geq 0$. De plus :

- si $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on a $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc $P(\cos(x)) \geq 0$ (d'après la question 1.(b)) ;
- et, si $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, on a $\cos(x) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ et donc $P(\cos(x)) \leq 0$.

On en déduit le signe de f' et le tableau de variations de f suivant sur l'intervalle $[0, \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	$\frac{1}{2}$	0

2. (a) La fonction φ est dérivable sur $[0, \pi]$ (comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, \pi], \quad \varphi'(x) &= \frac{5 \sin(x)(5 - 4 \cos(x)) - 4 \sin(x)(4 - 5 \cos(x))}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= \frac{9 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)^2} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

car $x \in [0, \pi]$. Plus précisément, $\sin(x) > 0$ si $x \in]0, \pi[$, donc :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \varphi'(x) > 0$$

On en déduit que φ est strictement croissante sur $]0, \pi[$.

x	0	π
φ	-1	1

On a donc bien :

$$\left(\forall x \in [0, \pi], \quad \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in [-1, 1] \right) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in]0, \pi[, \quad \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in]-1, 1[\right),$$

la deuxième propriété provenant de la croissance stricte de φ sur $]0, \pi[$.

- (b) Soit $y \in [-1, 1]$. Alors $\arccos(y) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(y)) \geq 0$. Ainsi :

$$\sin(\arccos(y)) = \sqrt{\sin(\arccos(y))^2} = \sqrt{1 - \cos(\arccos(y))^2}$$

Or $\cos \circ \arccos = \text{Id}_{[-1, 1]}$ donc $\cos(\arccos(y)) = y$. Ainsi :

$$\boxed{\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1 - y^2}}$$

Soit $x \in [0, \pi]$. Posons $y = \varphi(x)$. On sait d'après la question 2.(a) que $y \in [-1, 1]$ donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sin(g(x)) &= \sin(\arccos(\varphi(x))) = \sqrt{1 - \varphi(x)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(5 - 4 \cos(x))^2 - (4 - 5 \cos(x))^2}}{5 - 4 \cos(x)} \quad (\text{car } 5 - 4 \cos(x) \geq 0) \\ &= \frac{\sqrt{9 - 9 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{3 |\sin(x)|}{5 - 4 \cos(x)}\end{aligned}$$

Or $\sin(x) \geq 0$ (puisque $x \in [0, \pi]$) donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(g(x)) = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}}$$

- (c) La fonction $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$. Par ailleurs, la fonction φ est dérivable sur $]0, \pi[$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$) et, pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\varphi(x) \in] -1, 1[$ (question 2.(a)). Par composition :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur }]0, \pi[}$$

De plus :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \cos(g(x)) = \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} = \varphi(x)$$

car $\cos \circ \arccos = \text{Id}_{[-1,1]}$ et on sait que (cf. question 2.(a)) :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \varphi'(x) = \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \quad (\star)$$

Par ailleurs, on a aussi :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \varphi'(x) = g'(x) \times (-\sin(g(x))) = -g'(x) \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \quad (\star\star)$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient en divisant par $-\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \neq 0$:

$$\boxed{\forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) = -\frac{3}{5 - 4 \cos(x)}}$$

et donc la constante $C = -3$ convient.

- (d) Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $g'(x) < 0$ d'après la question précédente donc g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

x	0	π
g	π	0

Par ailleurs, g est continue sur $[0, \pi]$ comme composée de fonctions continues (on sait en effet que $\arccos$ est continue sur $[-1, 1]$ et que $x \mapsto \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$ est continue sur $[0, \pi]$). D'après le théorème de la bijection, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ réalise une bijection de } [0, \pi] \text{ sur } g([0, \pi]) = [0, \pi]}$$

- (e) Soit $x \in [0, \pi]$. Alors :

$$\cos \left(\arccos \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \right) \right) = \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$$

donc :

$$\varphi(g(x)) = \frac{4 - 5 \times \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}}{5 - 4 \times \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}} = \frac{4(5 - 4 \cos(x)) - 5(4 - 5 \cos(x))}{5(5 - 4 \cos(x)) - 4(4 - 5 \cos(x))} = \cos(x)$$

et donc, puisque $g = \arccos \circ \varphi$,

$$g(g(x)) = \arccos(\varphi(g(x))) = \arccos(\cos(x)) = x$$

car $x \in [0, \pi]$ et $\arccos \circ \cos = \text{Id}_{[0, \pi]}$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi], \quad g(g(x)) = x}$$

On en déduit que :

$$\boxed{(g \text{ est bijective et la réciproque de } g \text{ est } g^{-1} = g)}$$

3. (a) Soit $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur l'intervalle $f\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (d'après le théorème de la bijection). Comme $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ tel que } f(x_1) = y}$$

Pour x_2 , on applique de même le théorème de la bijection sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

(b) Soit $x \in [0, \pi]$. Alors (en utilisant la question 2.(b)) :

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos(g(x))}} = \frac{\frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}}{\sqrt{5-4 \times \frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}}} \\
 &= \frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)} \times \frac{\sqrt{5-4\cos(x)}}{\sqrt{5(5-4\cos(x))-4(4-5\cos(x))}} \\
 &= \frac{3\sin(x)}{3\sqrt{5-4\cos(x)}} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

En particulier, on a $f(g(x_1)) = f(x_1)$ et, comme $f(x_1) = f(x_2) (= y)$, il vient $f(g(x_1)) = f(x_2)$. Or $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc, par décroissance de g sur $[0, \pi]$, on a $g(x_1) \in \left[g\left(\frac{\pi}{3}\right), g(0)\right]$, c'est-à-dire $g(x_1) \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ puisque $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. Or on sait que f est injective sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ (elle y est en effet strictement décroissante) donc l'égalité $f(g(x_1)) = x_2$ entraîne que :

$$\boxed{x_2 = g(x_1)}$$