

DEVOIR MAISON 6

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (trigonométrie hyperbolique).

L'objectif de cet exercice est de simplifier une somme hyperbolique.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)^2}$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer, pour tout entier naturel n , la somme :

$$\Lambda_n = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a)$$

Exercice 2 (étude d'une fonction).

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$.

1. Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
3. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer une expression plus simple de f sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .