

DEVOIR MAISON 6

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (trigonométrie hyperbolique).

L'objectif de cet exercice est de simplifier une somme hyperbolique.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)^2}$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer, pour tout entier naturel n , la somme :

$$\Lambda_n = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a)$$

Exercice 2 (étude d'une fonction).

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$.

1. Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
3. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer une expression plus simple de f sur \mathbb{R}_- et sur \mathbb{R}_+^* .
5. *Question facultative.* Retrouver le résultat de la question 4. sans dériver la fonction f .

Exercice 3.

On définit une relation binaire \preccurlyeq sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \preccurlyeq y \iff (\exists n \in \mathbb{N}, y = x^n)$$

1. (a) La relation \preccurlyeq est-elle une relation d'ordre sur \mathbb{R}_+^* ? Préciser le cas échéant si l'ordre est total ou partiel.
 (b) L'ensemble \mathbb{R}_+^* est-il majoré pour la relation \preccurlyeq ? Admet-il un plus grand élément?
 (c) Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \preccurlyeq)$ n'est pas minoré.

Indication : on pourra montrer que si $(\mathbb{R}_+^*, \preccurlyeq)$ est minoré par x , alors x est nécessairement égal à 1.

2. La relation \preccurlyeq est-elle une relation d'équivalence sur \mathbb{R}_+^* ?