

DEVOIR MAISON 6

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- **Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.**

Exercice.

- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}}$.
 - Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
 - Soit $P : y \mapsto -2y^2 + 5y - 2$. Déterminer le signe de la fonction P sur $\mathbb{R}$.
 - Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $P(\cos(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Construire le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)$$

- En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$, montrer que :

$$\left(\forall x \in [0, \pi], \quad \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in [-1, 1] \right) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in]0, \pi[, \quad \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in]-1, 1[\right)$$

- Établir que :

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1 - y^2}$$

et en déduire que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(g(x)) = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}$$

- Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0, \pi[$ et, en dérivant de deux manières différentes la fonction $x \mapsto \cos(g(x))$, conclure que :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) = \frac{C}{5 - 4 \cos(x)}$$

- Montrer que la fonction g induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \pi]$.

- Vérifier que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad g(g(x)) = x$$

Que peut-on en déduire ?

- Soit $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- Montrer qu'il existe un unique nombre réel $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ tel que $f(x_1) = y$ et un unique nombre réel $x_2 \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(x_2) = y$.
- Montrer que $x_2 = g(x_1)$.

Indication : on commencera par vérifier que, pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $f(g(x)) = f(x)$.