

DEVOIR MAISON 5

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

On considère l'ensemble :

$$A = \{|z^3 - z + 2| \mid z \in \mathbb{U}\}$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure.

L'objectif de l'exercice est de montrer que A possède un maximum et de le calculer.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
3. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^3 - x^2 - 4x + 2 \end{cases}$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. On dressera le tableau de variations de f .
4. Soit $z \in \mathbb{U}$. On note $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z . Montrer que :

$$|z^3 - z + 2|^2 = 4f(\cos(\theta))$$

5. Montrer que A admet un maximum et une borne supérieure que l'on précisera.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$.

Indication : on distinguera deux cas selon que m est un multiple de n ou non.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n$$

- (a) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S(z) = n(z^n + 1)$$

- (b) Calculer $S\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)$. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n = 0$$