

DEVOIR MAISON 5

un corrigé

Exercice 1.

1. On utilise la propriété de la borne supérieure.

★ Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a $|z^3 - z + 2| \in \mathbb{R}_+$ donc A est une partie de $\mathbb{R}$.

★ Comme $1 \in \mathbb{U}$, on a :

$$2 = |1^3 - 1 + 2| \in A$$

Ainsi, A est non vide.

★ Soit $a \in A$. Il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $a = |z^3 - z + 2|$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$a \leq |z^3| + |z| + |2| = |z|^3 + |z| + 2 = 4$$

car $z \in \mathbb{U}$ (i.e. $|z| = 1$). On a donc montré que :

$$\forall a \in A, a \leq 4$$

Ainsi, A est majorée par 4.

Finalement, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc, d'après la propriété de la borne supérieure,

A admet une borne supérieure

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

★ On a $\cos(2\theta) = \operatorname{Re}(e^{i2\theta})$ et, d'après la formule de Moivre, on a :

$$e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 + 2i \cos(\theta) \sin(\theta)$$

donc :

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = \cos(\theta)^2 - (1 - \cos(\theta)^2) = 2\cos(\theta)^2 - 1$$

★ On a $\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(e^{i3\theta})$. Or, d'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} e^{i3\theta} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 \\ &= \cos(\theta)^3 + 3i \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 - i \sin(\theta)^3 \\ &= (\cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2) + i (3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 = \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) (1 - \cos(\theta)^2)$$

Finalement :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1 \quad \text{et} \quad \cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(6x^2 - x - 2)$$

On en déduit le tableau de signes de variations de f sur $\mathbb{R}$ suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f			$\frac{13}{4}$			$+\infty$
	$-\infty$				$\frac{2}{27}$	

On obtient les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ en factorisant par x^3 .

4. Soient $z \in \mathbb{U}$ et θ un argument de z . On a donc $z = e^{i\theta}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2|^2 &= (z^3 - z + 2)\overline{(z^3 - z + 2)} = (e^{3i\theta} - e^{i\theta} + 2)\overline{(e^{3i\theta} - e^{i\theta} + 2)} \quad (\text{formule de Moivre}) \\
 &= (e^{3i\theta} - e^{i\theta} + 2)(e^{-3i\theta} - e^{-i\theta} + 2) \\
 &= 1 - e^{2i\theta} + 2e^{3i\theta} - e^{-2i\theta} + 1 - 2e^{i\theta} + 2e^{-3i\theta} - 2e^{-i\theta} + 4 \\
 &= 2(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 6 \\
 &= 4\cos(3\theta) - 2\cos(2\theta) - 4\cos(\theta) + 6 \quad (\text{formule d'Euler})
 \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la question 2., on a :

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2|^2 &= 4(4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)) - 2(2\cos(\theta)^2 - 1) - 4\cos(\theta) + 6 \\
 &= 16\cos(\theta)^3 - 4\cos(\theta)^2 - 16\cos(\theta) + 8 \\
 &= 4(4\cos(\theta)^3 - \cos(\theta)^2 - 4\cos(\theta) + 2)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, \quad |z^3 - z + 2|^2 = 4f(\cos(\theta)) \quad (\text{où } \theta \text{ est un argument de } z)}$$

5. Montrons que :

$$A = \{2\sqrt{f(\cos(\theta))} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

$\boxed{\subset}$ Soit $a \in A$. Alors il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $a = |z^3 - z + 2|$. En notant $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z , on sait d'après la question précédente qu'on a l'égalité $a^2 = 4f(\cos(\theta))$ d'où l'on tire que $a = 2\sqrt{f(\cos(\theta))}$. Ceci démontre l'inclusion :

$$A \subset \{2\sqrt{f(\cos(\theta))} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $a \in \{2\sqrt{f(\cos(\theta))} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = 2\sqrt{f(\cos(\theta))}$. En posant $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, la question précédente nous donne l'égalité $a = |z^3 - z + 2|$ donc $a \in A$. Ceci démontre l'inclusion :

$$\{2\sqrt{f(\cos(\theta))} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset A$$

Par double inclusion, on a l'égalité annoncée. Par ailleurs, on sait que $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ donc on a également :

$$A = \{2\sqrt{f(x)} \mid x \in [-1, 1]\} = g([-1, 1])$$

où $g : x \mapsto 2\sqrt{f(x)}$. D'après la question 2., on a le tableau de variations suivant pour la fonction g sur l'intervalle $[-1, 1]$ (les variations de g sont une conséquence de celles de f et de la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
g	2	$\sqrt{13}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	1

donc :

$$A = g([-1, 1]) = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \sqrt{13} \right]$$

On en déduit que :

$$\boxed{\max(A) = \sup(A) = \sqrt{13}}$$

Exercice 2.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** m est un multiple de n

Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $m = pn$. On a d'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{m,n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kpn} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikp\pi} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad (\text{car } e^{2ikp\pi} = 1 \text{ car } kp \in \mathbb{Z}) \\
 &= n
 \end{aligned}$$

★ **Premier cas :** m n'est pas un multiple de n

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\omega^{km} = (\omega^m)^k = \left(e^{\frac{2im\pi}{n}} \right)^k$$

Or m n'est pas un multiple de n donc $\frac{2m\pi}{n}$ n'est pas un multiple de 2π . Par conséquent, $e^{\frac{2im\pi}{n}} \neq 1$. Ainsi :

$$\sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2im\pi}{n}} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2im\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{2im\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{2im\pi}}{1 - e^{\frac{2im\pi}{n}}} \quad (\text{formule de Moivre})$$

$$= 0$$

car $e^{2im\pi} = 1$. Finalement¹ :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sigma_{m,n} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k + z)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z^{n-m} \omega^{km} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z^{n-m} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}}_{=\sigma_{m,n}}$$

Dans l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$, les seuls multiples de n sont 0 et n donc :

$$S(z) = \binom{n}{0} z^n \sigma_{0,n} + \underbrace{\sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} z^{n-m} \underbrace{\sigma_{m,n}}_{=0}}_{=0} + \binom{n}{n} z^0 \sigma_{n,n}$$

$$= nz^n + n$$

Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S(z) = n(z^n + 1)$$

(b) En utilisant la question 3. et la formule de Moivre, on a :

$$S\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = n(e^{i\pi} + 1)$$

Or $e^{i\pi} = -1$ donc :

$$S\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = 0$$

En utilisant l'expression de S sous forme de somme, on a :

$$\begin{aligned} S\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} + \omega^k \right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^n \quad (\text{formule de Moivre}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}} \left(e^{\frac{i(2k-1)\pi}{2n}} + e^{-\frac{i(2k-1)\pi}{2n}} \right) \right]^n \quad (\text{angle moitié}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2}} \times 2^n \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n \quad (\text{formule d'Euler}) \\ &= 2^n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{e^{\frac{i\pi}{2}}}_{=i} \times \underbrace{(e^{i\pi})^k}_{=(-1)^k} \times \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n \\ &= i2^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n \end{aligned}$$

On a $S\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = 0$ et $i2^n \neq 0$ donc, par intégrité de $\mathbb{C}$, on a bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n = 0$$

1. Si a et b sont des entiers relatifs, dire que a divise b se note $a \mid b$.