Devoir Maison 5

un corrigé

Exercice 1.

1. (a) Soient $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On suppose que $h(z) = h(w)$. Montrons que $z = w$. On a $\dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1+w}{1-w}$ donc $(1+z)(1-w) = (1-z)(1+w)$. En développant, on obtient :

$$1 - w + z - zw = 1 - z + w - zw \qquad \textit{i.e.} \qquad 2z = 2w,$$

soit encore $z = w$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } h \text{ est injective}}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrons que $h(z) \in i\mathbb{R}$. D'après les propriétés de la conjugaison, on sait qu'il suffit de montrer que $\overline{h(z)} = -h(z)$. Tout d'abord, comme $z \in \mathbb{U}$, on a $|z| = 1$, *i.e.* $\sqrt{z\overline{z}} = 1$. Ainsi, $z\overline{z} = 1$, ce qui implique que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. En utilisant les propriétés de la conjugaison, on a alors :

$$\begin{aligned} \overline{h(z)} = \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{\overline{1}+\overline{z}}{\overline{1}-\overline{z}} &= \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \qquad \text{(car } 1 \in \mathbb{R}\text{)} \\ &= \frac{z+1}{z-1} \\ &= -\frac{1+z}{1-z}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\overline{h(z)} = -h(z)$. Finalement :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z \in \mathbb{U} \setminus \{1\} \implies h(z) \in i\mathbb{R}}$$

(c) Montrons que $h(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$ en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $w \in h(\mathbb{U} \setminus \{1\})$. Alors il existe $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ tel que $w = h(z)$. D'après la question précédente, on sait que $w = h(z) \in i\mathbb{R}$. On a donc l'inclusion $h(\mathbb{U} \setminus \{1\}) \subset i\mathbb{R}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $w \in i\mathbb{R}$. Montrons que $w \in h(\mathbb{U} \setminus \{1\})$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On résout :

$$\begin{aligned} w = h(z) \iff w = \frac{1+z}{1-z} \iff w(1-z) = 1+z &\iff w - wz = 1+z \\ &\iff z(1+w) = w-1 \\ &\iff z = \frac{w-1}{1+w} \end{aligned}$$

car $w \neq -1$ (en effet, $w \in i\mathbb{R}$). Il reste à montrer que $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Tout d'abord, $w \neq 1$ car :

$$z - 1 = \frac{w-1}{1+w} - 1 = \frac{w-1-(1+w)}{1+w} = \frac{-2}{1+w} \neq 0 \qquad (*)$$

De plus, $w \in i\mathbb{R}$ donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $w = ib$. On a donc :

$$|z| = \left|\frac{ib-1}{1+ib}\right| = \frac{|ib-1|}{|1+ib|} = \frac{\sqrt{(-1)^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}} = 1,$$

i.e. $z \in \mathbb{U}$. Finalement, $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $w = h(z)$ donc $w \in h(\mathbb{U} \setminus \{1\})$. On a donc bien l'inclusion $i\mathbb{R} \subset h(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Par double inclusion, on conclut donc que :

$$\boxed{h(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}}$$

(d) Soit $w \in \mathbb{C}$. On résout l'équation $h(z) = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Le calcul mené à la question précédente nous donne :

$$h(z) = w \iff z(1+w) = w - 1$$

On distingue alors deux cas :

- ⋆ Si $w = -1$, l'égalité $h(z) = -1$ est équivalente à $0 = -2$. On en déduit que -1 n'admet pas d'antécédent par l'application h dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- ⋆ Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, alors $w + 1 \neq 0$ et :

$$h(z) = w \iff z = \frac{w-1}{1+w}$$

et le calcul $(*)$ montre que $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ainsi, w admet un unique antécédent par l'application h dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{l'application } \tilde{h} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1+z}{1-z} \end{cases} \text{ est bijective et } \left(\tilde{h}\right)^{-1} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ w & \longmapsto & \dfrac{w-1}{1+w} \end{cases}}$$

2. (a) Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} |x-y|^2 = (x-y)\overline{(x-y)} = (x-y)(\overline{x} - \overline{y}) &= x\,\overline{x} - x\,\overline{y} - \overline{x}\,y + y\,\overline{y} \\ &= |x|^2 - \left(x\,\overline{y} + \overline{x\,\overline{y}}\right) + |y|^2 \end{aligned}$$

et on sait que $x\,\overline{y} + \overline{x\,\overline{y}} = 2\,\mathrm{Re}(x\,\overline{y})$ donc :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad |x-y|^2 = |x|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x\,\overline{y}) + |y|^2}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{D}$.

i. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{1}{\overline{a}}\right\}$. Par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $\dfrac{|z-a|}{|\overline{a}z - 1|}, 1 \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_a(z)| < 1 \iff \frac{|z-a|}{|\overline{a}z-1|} < 1 &\iff \frac{|z-a|^2}{|\overline{a}z-1|^2} < 1 \\ &\iff |z-a|^2 < |\overline{a}z - 1|^2 \end{aligned}$$

car $|\overline{a}z - 1|^2 > 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{a}}\right\}, \qquad |\varphi_a(z)| < \iff |z-a|^2 < |\overline{a}z - 1|^2}$$

ii. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{1}{\overline{a}}\right\}$. On a d'après la question 2.(a) :

$$\begin{aligned} |z-a|^2 < |\overline{a}z-1|^2 &\iff |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{a}) + |a|^2 < |\overline{a}z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}z \times \overline{1}) + |1|^2 \\ &\iff |z|^2 + |a|^2 < \underbrace{|\overline{a}|^2}_{=|a|^2} |z|^2 + 1 \\ &\iff |z|^2\left(1 - |a|^2\right) < 1 - |a|^2 \\ &\iff |z|^2 < 1 \qquad (\text{car } 1 - |a|^2 > 0 \text{ car } a \in \mathbb{D}) \\ &\iff |z| < 1 \end{aligned}$$

par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ (et car $|z|, 1 \in \mathbb{R}_+$). Ainsi :

$$\begin{aligned} z \in \varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) &\iff \varphi_a(z) \in \mathbb{D} \qquad (\text{par définition de l'image réciproque}) \\ &\iff |\varphi_a(z)| < 1 \\ &\iff |z-a|^2 < |\overline{a}z - 1|^2 \qquad (\text{d'après la question 2.(b)i.}) \\ &\iff |z| < 1 \qquad (\text{d'après le raisonnement précédent}) \end{aligned}$$

On a donc démontré que :

$$\boxed{\varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}}$$

Exercice 2.

1. On raisonne par récurrence.

   ⋆ Montrons que l'égalité est vraie pour $n = 1$. On a :

$$\begin{aligned} z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{2} = \frac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + r}{2} &= \frac{r}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1\right) \\ &= \frac{r}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{r}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

   d'après la formule d'Euler (pour le cosinus). Ainsi :

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{2} = r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}},$$

   ce qu'il fallait démontrer.

   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $z_n = r\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2^n}}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. Montrons que :

$$z_{n+1} = r\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

   On a :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{z_n + |z_n|}{2} \\ &= \frac{r}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2^n}} + \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right|\right) \end{aligned}$$

   Or $\theta \in]0, \pi]$ donc $\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{4}, \dots, \frac{\theta}{2^n}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]^n$. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \geqslant 0,$$

   ce qui implique que :

$$\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

   On en déduit que :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{r}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2^n}} + 1\right) \\ &= r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2^{n+1}}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2^{n+1}}}}{2} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2^{n+1}}} \\ &= r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

   d'après la formule d'Euler. L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

   ⋆ Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_n = r\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$$

2. On raisonne à nouveau par récurrence.

- ⋆ Montrons que l'égalité est vraie pour $n = 1$. On sait que $\theta \in]0, \pi]$ donc $\dfrac{\theta}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \neq 0$.
  En utilisant la formule de duplication du sinus, on a :
$$\frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
  La proposition est donc vraie pour $n = 1$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$. Montrons que :
$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$$
  On a :
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\\ &= \frac{\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$
  par hypothèse de récurrence. D'après la formule de duplication du sinus, on sait aussi que :
$$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$
  d'où :
$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)},$$
  donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.
- ⋆ Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}}$$

3. (a) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = x - \sin(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)$$
   - ⋆ **Étude de la fonction f.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$$
     puisque $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. On en déduit le tableau de variation de f suivant sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

     Pour trouver la limite de f en $+\infty$, on peut par exemple écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leqslant 1$ donc $f(x) \geqslant x - 1$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.
     On déduit du tableau de variation de f que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \geqslant 0,$$
     c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sin(x) \leqslant x$$

⋆ **Étude de la fonction g.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$$

La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g''(x) = -x + \sin(x) = -f(x) \leqslant 0$$

On en déduit le tableau de variation de g' et g suivants :

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$-$	
g'	0	$\searrow$	$-\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty$

Pour la limite en $+\infty$ de g', il suffit encore d'utiliser le théorème de comparaison et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $\cos(x) \geqslant -1$. On déduit du tableau de variations de g que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g(x) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$$

On déduit des deux études précédentes que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x}$$

(b) D'après la question 3.(a), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 1 - \frac{x^2}{6} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) = 1$ donc, d'après la théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

4. D'après les questions 1. et 2., on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_n = r \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \times \frac{\sin(\theta)}{\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\theta}{2^n} = 0$ donc, d'après la question 3.(b), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \lim_{X \to 0^+} \frac{X}{\sin(X)} = 1$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}} &= \lim_{n \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right) \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{la suite } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } r\frac{\sin(\theta)}{\theta}}$$