Devoir Maison 5

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (applications homographiques du plan complexe).

1. *Étude d'une première application*
   On considère l'application *homographique* suivante :
   $$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1+z}{1-z} \end{array} \right.$$
   (a) Montrer que l'application h est injective [1].
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :
   $$z \in \mathbb{U} \setminus \{1\} \implies h(z) \in i\mathbb{R}$$
   (c) Montrer que $h(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que h est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer, et préciser la bijection réciproque correspondante.
2. *Une propriété remarquable des automorphismes du disque*
   On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe, *i.e.* :
   $$\mathbb{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1 \right\}$$
   Nous nous intéressons ici à des applications particulières du plan complexe, à savoir les *automorphismes du disque.*

Définition On appelle *automorphisme du disque* toute application de la forme suivante :
$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{1}{\overline{a}} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{\overline{a}z - 1} \end{array} \right. ,$$
où $a \in \mathbb{D}$.

On souhaite démontrer que :
$$\varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D},$$
où $\varphi_a^{-1}(\mathbb{D})$ désigne l'image réciproque de $\mathbb{D}$ par l'application φ_a.

1. Évidemment, il n'est pas question de dériver h... Ici, il s'agit d'une fonction de la variable complexe donc la notion de croissance pour une telle fonction n'a aucun sens.

(a) Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad |x-y|^2 = |x|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x\overline{y}) + |y|^2$$

(b) Soit $a \in \mathbb{D}$. On note φ_a l'application introduite dans la définition ci-dessus.

i. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\overline{a}} \right\}, \qquad |\varphi_a(z)| < 1 \iff |z-a|^2 < |\overline{a}z - 1|^2$$

ii. En déduire que $\varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Exercice 2.

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, \pi]$. On pose $z_0 = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_n = r\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

3. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

(b) En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.

4. Conclure que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.