Devoir Maison 4

- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array} \right.$.

1. Calculer $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}([1,+\infty[)$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
3. (a) Montrer que :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{y^2-4y+8} > 2-y$$
   (b) Déterminer un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ tel que l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array} \right.$ soit bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 2.

Soient A, B, C et D quatre ensembles non vides, $f \in B^A$, $g \in C^B$ et $h \in D^C$.

1. Montrer que si l'application $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si l'application $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que :
$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives}) \iff (f, g \text{ et } h \text{ bijectives})$$
4. (a) Montrer que :
$$\forall X \in \mathscr{P}(B), \qquad f(f^{-1}(X)) \subset X$$
   L'inclusion réciproque est-elle vraie en général ?

   (b) Montrer que f est surjective si et seulement si :
$$\forall X \in \mathscr{P}(B), \qquad f(f^{-1}(X)) = X$$

Exercice 3 (facultatif).

Les trois questions sont indépendantes.

Soient E et F deux ensembles non vides.

1. Soit $f \in F^E$. Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall X \in \mathscr{P}(E), \qquad f(E \setminus X) = F \setminus f(X)$$

2. Soit $f \in F^E$. On considère l'application :

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que $\tilde{f}$ est injective si et seulement si f est surjective.

   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est surjective si et seulement si f est injective.

3. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective de E sur $\mathscr{P}(E)$.