

# DEVOIR MAISON 4

*un corrigé*

## Exercice 1.

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (comme quotient de fonctions qui le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 2x(4x - 3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

Les racines du trinôme du second degré  $-4X^2 + 6X + 4$  sont  $-\frac{1}{2}$  et 2. Le tableau de signes de  $f'$  et de variations de  $f$  est le suivant :

|         |           |                |     |           |     |
|---------|-----------|----------------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$            | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f$     | $0$       |                | $1$ |           | $0$ |
|         |           | $-4$           |     |           |     |

On a  $f(\mathbb{R}) = [-4, 1] \neq \mathbb{R}$  donc :

l'application  $f$  n'est pas surjective (elle n'est donc pas bijective non plus)

Étudions les antécédents de  $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{4x - 3}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \iff 8x - 6 = x^2 + 1 \iff x^2 - 8x + 7 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 7$$

Ainsi,  $\frac{1}{2}$  admet deux antécédents par l'application  $f$  dans  $\mathbb{R}$ . On en déduit que :

l'application  $f$  n'est pas injective

2. ★ Calcul de  $f([1, +\infty[)$

Le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  est :

|     |                                                                        |     |           |
|-----|------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|
| $x$ | $1$                                                                    | $2$ | $+\infty$ |
| $f$ | $\frac{1}{2} \nearrow \quad \quad \searrow 0$<br>$\quad \quad \quad 1$ |     |           |

donc :

$$f([1, +\infty[) = ]0, 1]$$

- ★ Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, on a :

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathbb{R}_+) &\iff f(x) \geq 0 \iff \frac{4x-3}{x^2+1} \geq 0 \iff 4x-3 \geq 0 \quad (\text{car } x^2+1 > 0) \\ &\iff x \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \left[ \frac{3}{4}, +\infty \right[$$

★ Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([-2, 2]) &\iff f(x) \in [-2, 2] \\ &\iff \frac{4x-3}{x^2+1} \geq -2 \text{ et } \frac{4x-3}{x^2+1} \leq 2 \\ &\iff 4x-3 \geq -2x^2-2 \text{ et } 4x-3 \leq 2x^2+2 \quad (\text{car } x^2+1 > 0) \\ &\iff 2x^2+4x-1 \geq 0 \text{ et } 2x^2-4x+5 \geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme  $2X^2-4X+5$  est négatif donc la dernière inégalité est vérifiée. Les racines du trinôme du second degré  $2X^2+4X-1$  sont :

$$\frac{-4-\sqrt{24}}{4} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

donc :

$$2x^2+4x-1 \geq 0 \iff x \in \left] -\infty, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \cup \left[ -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty \right[$$

On en déduit que :

$$f^{-1}([-2, 2]) = \left] -\infty, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \cup \left[ -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty \right[$$

3. D'après la question 1., on a  $f\left(\left[-\frac{1}{2}, 2\right]\right) = [-4, 1]$ . Montrons que :

$$\forall y \in [-4, 1], \exists ! x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right], y = g(x)$$

Soit  $y \in [-4, 1]$ . On résout l'équation  $y = g(x)$  d'inconnue  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$  :

$$g(x) = y \iff \frac{4x-3}{x^2+1} = y \iff 4x-3 = yx^2+y \iff yx^2-4x+(y+3) = 0$$

Si  $y = 0$ , alors :

$$g(x) = 0 \iff -4x+3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$$

On se place maintenant dans le cas où  $y \neq 0$ . Le trinôme du second degré  $yX^2-4X+y+3$  a pour discriminant :

$$\Delta_y = 16 - 4y(y+3) = 4(-y^2-3y+4) = 4(1-y)(y+4)$$

Comme  $y \in [-4, 1]$ , on a  $1-y \geq 0$  et  $y+4 \geq 0$  donc  $\Delta_y \geq 0$ . Le trinôme précédent admet donc pour racines réelles,

$$x_- = \frac{4-\sqrt{\Delta_y}}{2y} = \frac{2-\sqrt{(1-y)(y+4)}}{y} \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{2+\sqrt{(1-y)(y+4)}}{y}$$

Remarquons que ces deux racines sont confondues si et seulement si  $y \in \{-4, 1\}$ . On a :

$$g(x) = y \iff x = x_+ \text{ ou } x = x_-$$

Soit  $y \in ]-4, 0[ \cup ]0, 1[$ . Montrons que  $x_+ \notin \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$  et que  $x_- \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ , ce qui permettra de conclure.

On distingue deux cas.

★ **Premier cas :**  $y \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$

On a  $2 + \sqrt{(1-y)(y+4)} > 2$  car  $(1-y)(y+4) > 0$ . De plus,  $0 < |y| < 1$  donc, par décroissance stricte de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il vient  $\frac{1}{|y|} > 1$  puis :

$$|x_+| = \frac{2 + \sqrt{(1-y)(y+4)}}{|y|} > 2$$

Ainsi,  $x_+ < -2$  ou  $x_+ > 2$  donc  $x_+ \notin \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ . D'autre part, on remarque que (en utilisant l'expression conjuguée) :

$$\begin{aligned} x_- &= \frac{(2 - \sqrt{(1-y)(y+4)})(2 + \sqrt{(1-y)(y+4)})}{y(2 + \sqrt{(1-y)(y+4)})} = \frac{4 - (1-y)(y+4)}{y(2 + \sqrt{(1-y)(y+4)})} \\ &= \frac{y^2 + 3y}{y(2 + \sqrt{(1-y)(y+4)})} \\ &= \frac{y+3}{2 + \sqrt{(1-y)(y+4)}} \end{aligned}$$

On a  $-1 \leq y \leq 1$  donc  $0 \leq y+3 \leq 4$ . De plus,  $2 + \sqrt{(1-y)(y+4)} \geq 2$  donc  $\frac{1}{2 + \sqrt{(1-y)(y+4)}} \leq \frac{1}{2}$ .

Par produit, on obtient  $0 \leq x_- \leq 2$ . Ainsi,  $x_- \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ . On vient de montrer que l'unique antécédent de  $y$  par  $g$  dans l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$  est  $x_-$ .

★ **Deuxième cas :**  $y \in ]-4, -1]$

On a encore  $2 + \sqrt{(1-y)(y+4)} > 2$  donc, en divisant par  $y < 0$ , on obtient  $x_+ < \frac{2}{y}$ . Ensuite,  $y > -4$

donc, par décroissance stricte de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_-^*$ , on obtient  $\frac{1}{y} < -\frac{1}{4}$  puis  $\frac{2}{y} < -\frac{1}{2}$ . Ainsi,

$x_+ < -\frac{1}{2}$  et donc  $x_+ \notin \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ . Par ailleurs,  $\frac{1}{2 + \sqrt{(1-y)(y+4)}} \leq \frac{1}{2}$  et  $-1 \leq y+3 \leq 2$  donc :

— si  $y+3 \leq 0$ , alors :

$$0 \geq x_- = \frac{y+3}{2 + \sqrt{(1-y)(y+4)}} \geq \frac{y+3}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc } x_- \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

— et si  $y+3 > 0$ , alors :

$$0 \leq x_- = \frac{y+3}{2 + \sqrt{(1-y)(y+4)}} \leq \frac{y+3}{2} \leq 1$$

$$\text{donc } x_- \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

Dans ce deuxième cas,  $y$  admet donc pour unique antécédent  $x_-$ .

Finalement, tout élément  $y$  de  $[-4, 1]$  admet un unique antécédent par l'application  $g$  dans  $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ , à savoir  $x_-$ . On peut donc conclure que :

|                                                               |                                                                                              |                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| l'application $g$ est bijective de réciproque l'application : |                                                                                              |                                                                                                                                                                    |
| $g^{-1} :$                                                    | $\left\{ \begin{array}{ll} [-4, 1] & \longrightarrow \\ y & \longmapsto \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{ll} \left[-\frac{1}{2}, 2\right] & \text{si } y = 0 \\ \frac{3}{4} & \\ \frac{2 - \sqrt{(1-y)(y+4)}}{y} & \text{sinon} \end{array} \right.$ |

## Exercice 2.

Montrons, comme indiqué, les implications :

$$(P_1) \implies (P_2) \implies (P_3) \implies (P_1)$$

- ★ On suppose que  $(P_1)$  est vraie. Montrons que  $(P_2)$  est vraie. Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Montrons l'égalité  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$  Soit  $x \in f(A \cap B)$ . Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, il existe  $c \in A \cap B$  tel que  $x = f(c)$ . Comme  $c \in A \cap B$ , on a  $c \in A$  donc l'égalité  $x = f(c)$  implique que  $x \in f(A)$ . De la même manière, on a  $x \in f(B)$ . Ainsi,  $x \in f(A) \cap f(B)$ . Ceci démontre l'inclusion  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

$\boxed{\supset}$  Soit  $x \in f(A) \cap f(B)$ . Il existe  $(a, b) \in A \times B$  tels que  $x = f(a)$  et  $x = f(b)$ . Ainsi,  $f(a) = f(b)$  et comme  $f$  est injective ( $(P_1)$  étant supposée vraie), on a  $a = b$ . Ainsi,  $a \in B$  donc  $a \in A \cap B$ . L'égalité  $x = f(a)$  implique que  $x \in f(A \cap B)$ . Finalement, on a l'inclusion  $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ .

Par double inclusion, on peut conclure que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . La propriété  $(P_2)$  est donc vraie. Ceci démontre l'implication  $(P_1) \implies (P_2)$ .

- ★ On suppose maintenant que  $(P_2)$  est vraie. Montrons alors que  $(P_3)$  est vraie. Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ . Comme  $(P_2)$  est vraie, on a :

$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

La proposition  $(P_3)$  est donc vraie. Ceci démontre l'implication  $(P_2) \implies (P_3)$ .

- ★ On suppose enfin que  $(P_3)$  est vraie. Montrons que  $(P_1)$  est vraie, *i.e.* que  $f$  est injective. Soient  $x, y \in E$  tels que  $f(x) = f(y)$ . Montrons que  $x = y$ . Par l'absurde, supposons que  $x \neq y$ . En posant  $A = \{x\} \in \mathcal{P}(E)$  et  $B = \{y\} \in \mathcal{P}(E)$ , on a alors  $A \cap B = \emptyset$ . La propriété  $(P_3)$  (supposée vraie ici) nous donne l'égalité  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ . Or :

$$f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad f(B) = f(\{y\}) = \{f(y)\} = \{f(x)\} = f(A)$$

Ainsi :

$$f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \neq \emptyset$$

On obtient donc une absurdité. On conclut donc que  $x = y$ . L'application  $f$  est ainsi injective. Ceci démontre l'implication  $(P_3) \implies (P_1)$ .

Finalement :

les assertions  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  sont équivalentes

## Exercice 3.

1. Il suffit de montrer que :

$$(f \text{ injective}) \iff (\varphi \text{ injective}) \quad \text{et} \quad (f \text{ injective}) \iff (\psi \text{ surjective})$$

- ★ Montrons que  $f$  est injective si et seulement si  $\varphi$  est injective.

— On suppose que  $f$  est injective. Montrons que  $\varphi$  est injective, *i.e.* que :

$$\forall X, X' \in \mathcal{P}(E), \varphi(X) = \varphi(X') \implies X = X'$$

Soient  $X, X' \in \mathcal{P}(E)$ . On suppose que  $\varphi(X) = \varphi(X')$ , *i.e.* que  $f(X) = f(X')$ . Montrons que  $X = X'$  en raisonnant par double inclusion.

Soit  $x \in X$ . Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, on a  $f(x) \in f(X)$ . Or  $f(X) = f(X')$  donc  $f(x) \in f(X')$ . Il existe donc  $x' \in X'$  tel que  $f(x) = f(x')$ . Mais  $f$  est injective donc  $x = x'$ . Ainsi,  $x \in X'$ . Ceci démontre l'inclusion  $X \subset X'$ . Comme  $X$  et  $X'$  jouent des rôles symétriques, on a aussi l'inclusion  $X' \subset X$ . Par double inclusion, on a l'égalité  $X = X'$ . L'application  $\varphi$  est donc injective.

— On suppose que  $\varphi$  est injective. Montrons que  $f$  est injective, *i.e.* que :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Soient  $x, x' \in E$ . On suppose que  $f(x) = f(x')$ . Posons  $X = \{x\} \in \mathcal{P}(E)$  et  $X' = \{x'\} \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

$$f(X) = f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f(X') \quad \text{i.e.} \quad \varphi(X) = \varphi(X')$$

Or  $\varphi$  est injective donc  $X = X'$ , *i.e.*  $\{x\} = \{x'\}$ , soit encore  $x = x'$ . L'application  $f$  est donc injective.

Finalement,  $f$  est injective si et seulement si  $\varphi$  est injective.

★ Montrons que  $f$  est injective si et seulement si  $\psi$  est surjective.

— On suppose que  $f$  est injective. Montrons que  $\psi$  est surjective, *i.e.* que :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \exists Y \in \mathcal{P}(F), X = \psi(Y)$$

Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ . Posons  $Y = f(X) \in \mathcal{P}(F)$ . Montrons que  $\psi(Y) = X$ , *i.e.* que  $f^{-1}(f(X)) = X$ , en raisonnant par double inclusion.

- Soit  $x \in X$ . On a  $f(x) \in f(X)$  (par définition de l'image directe d'un ensemble par une application) puis, par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, on a  $x \in f^{-1}(f(X))$ . Ceci démontre l'inclusion  $X \subset f^{-1}(f(X))$ .
- Soit  $x \in f^{-1}(f(X))$ . Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, on a  $f(x) \in f(X)$ . Il existe donc  $x' \in X$  tel que  $f(x) = f(x')$ . Or  $f$  est injective donc  $x = x' \in X$ . On a donc l'inclusion  $f^{-1}(f(X)) \subset X$ .

Par double inclusion, on a bien l'égalité  $f^{-1}(f(X)) = X$ . Autrement dit,  $\psi(Y) = X$  et donc  $Y$  est un antécédent de  $X$  par l'application  $\psi$  dans  $\mathcal{P}(F)$ . L'application  $\psi$  est donc surjective.

— On suppose que  $\psi$  est surjective. Montrons que  $f$  est injective. Soient  $x, x' \in E$ . On suppose que  $f(x) = f(x')$ . Montrons que  $x = x'$ . On a  $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$  et  $\psi$  est surjective donc il existe  $Y \in \mathcal{P}(F)$  tel que  $\psi(Y) = \{x\}$ . Autrement dit,  $f^{-1}(Y) = \{x\}$ . Or :

$$f^{-1}(Y) = \{z \in E \mid f(z) \in Y\}$$

On a  $x \in f^{-1}(Y)$  et comme  $f(x') = f(x)$ , on a aussi  $x' \in f^{-1}(Y)$ . Ainsi,  $x' \in \{x\}$  donc  $x' = x$ . L'application  $f$  est donc injective.

Ceci démontre que  $f$  est injective si et seulement si  $\psi$  est surjective.

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \psi \text{ surjective}}$$

2. ★ Montrons que  $f$  est surjective si et seulement si  $\varphi$  est surjective.

— On suppose que  $f$  est surjective. Montrons que  $\varphi$  est surjective, *i.e.* que :

$$\forall Y \in \mathcal{P}(F), \exists X \in \mathcal{P}(E), Y = \varphi(X)$$

Soit  $Y \in \mathcal{P}(F)$ . Considérons la partie  $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(E)$  et montrons qu'on a l'égalité :

$$Y = \varphi(X) \quad \text{i.e.} \quad Y = f(f^{-1}(Y))$$

en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$  Soit  $y \in Y$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, on a  $x \in f^{-1}(Y)$  (car  $f(x) = y \in Y$ ) donc  $y = f(x) \in f(f^{-1}(Y))$  par définition de l'image directe d'un ensemble par une application. On a donc l'inclusion  $Y \subset f(f^{-1}(Y))$ .

$\boxed{\supset}$  Soit  $y \in f(f^{-1}(Y))$ . Il existe  $x \in f^{-1}(Y)$  tel que  $y = f(x)$  (par définition de l'image directe d'un ensemble par une application). Comme  $x \in f^{-1}(Y)$ , on a  $f(x) \in Y$ , *i.e.*  $y \in Y$ . Ceci démontre l'inclusion  $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ .

Par double inclusion, on a l'égalité  $Y = \varphi(X)$ . L'application  $\varphi$  est donc surjective.

— On suppose que  $\varphi$  est surjective. Montrons que  $f$  est surjective, *i.e.* que :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Soit  $y \in F$ . Alors  $\{y\} \in \mathcal{P}(F)$  et  $\varphi$  est surjective donc il existe  $X \in \mathcal{P}(E)$  tel que  $\varphi(X) = \{y\}$ , *i.e.*  $f(X) = \{y\}$ . Ainsi,  $y \in f(X)$ . On a nécessairement  $X \neq \emptyset$  car  $f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y\}$ . En considérant un élément  $x$  de  $X$  (quelconque), on a  $f(x) \in \{y\}$ , *i.e.*  $f(x) = y$ . Enfin,  $X \subset E$  donc  $x \in E$ . L'application  $f$  est donc surjective.

On vient de montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $\varphi$  est surjective.

★ Montrons que  $f$  est surjective si et seulement si  $\psi$  est injective.

— On suppose que  $f$  est surjective. Montrons que  $\psi$  est injective, *i.e.* que :

$$\forall Y, Y' \in \mathcal{P}(F), \psi(Y) = \psi(Y') \implies Y = Y'$$

Soient  $Y, Y' \in \mathcal{P}(F)$ . On suppose que  $\psi(Y) = \psi(Y')$ , *i.e.* que  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y')$ . Montrons que  $Y = Y'$  en raisonnant par double inclusion. Soit  $y \in Y$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$  car  $f$  est surjective. On a donc  $x \in f^{-1}(Y)$  (par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application). Or  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y')$  donc  $x \in f^{-1}(Y')$ , *i.e.*  $y = f(x) \in Y'$ . Ceci démontre l'inclusion  $Y \subset Y'$ . Comme  $Y$  et  $Y'$  jouent des rôles symétriques, on a également l'inclusion  $Y' \subset Y$ . Ainsi, on a l'égalité  $Y = Y'$  et donc  $\psi$  est injective.

- On suppose que  $\psi$  est injective. Montrons que  $f$  est surjective. Soit  $y \in F$ . On considère l'ensemble  $Y = \{y\} \in \mathcal{P}(F)$ . On a l'égalité :

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(f(f^{-1}(Y)))$$

car :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad x \in f^{-1}(f(f^{-1}(Y))) &\iff f(x) \in f(f^{-1}(Y)) = f(f^{-1}(\{y\})) \\ &\iff \exists z \in f^{-1}(\{y\}), f(x) = f(z) \\ &\iff \exists z \in E, f(z) = y \text{ et } f(x) = f(z) \\ &\iff f(x) = y \\ &\iff x \in f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

Ceci démontre l'égalité annoncée, qui se réécrit  $\psi(Y) = \psi(f(f^{-1}(Y)))$ . Or  $\psi$  est injective donc  $Y = f(f^{-1}(Y))$ . Ainsi,  $y \in Y = f(f^{-1}(Y))$  donc il existe  $x \in f^{-1}(Y)$  tel que  $y = f(x)$ . Or  $f^{-1}(Y) \subset E$  donc  $x \in E$ . Ainsi, l'application  $f$  est surjective.

On vient de montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $\psi$  est injective.

Ainsi :

|                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|
| $f \text{ surjective} \iff \varphi \text{ surjective} \iff \psi \text{ injective}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------|