Devoir Maison 4

un corrigé

Exercice 1.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ sont évidentes car $\dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. Par ailleurs, $x-1 \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0^-$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$. On traite la limite en 1^+ de la même manière. On en déduit que :

$$\boxed{f(]1, +\infty[) = \mathbb{R}}$$

Déterminons maintenant $f^{-1}([1, +\infty[)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}([1, +\infty[) \iff f(x) \in [1, +\infty[&\iff x + 1 - \frac{1}{x-1} \geqslant 1 \\
&\iff x - \frac{1}{x-1} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{x^2 - x - 1}{x-1} \geqslant 0 \\
&\iff x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2 - x - 1}{x-1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{f^{-1}([1, +\infty[) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$$

2. D'après l'étude précédente, le nombre $1 \in \mathbb{R}$ admet deux antécédents (distincts) par f dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, à savoir $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective (elle n'est donc pas bijective)}}$$

Par contre, d'après la question 1., on a $f(\mathbb{R}\setminus\{1\})=\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{f \text{ est surjective}}$$

3. (a) Soit $y\in\mathbb{R}$. On a :

$$y^2-4y+8=(y-2)^2+4>(y-2)^2$$

donc, par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{y^2-4y+8}>\sqrt{(y-2)^2} \qquad i.e. \qquad \sqrt{y^2-4y+8}>|y-2|$$

Or on sait que [1] :

$$|y-2|=\max(y-2,-(y-2))=\max(y-2,2-y)\geqslant 2-y$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R}, \qquad \sqrt{y^2-4y+8}>2-y}$$

(b) Posons $E=]1,+\infty[$. Soit $y\in\mathbb{R}$. On résout l'équation $g(x)=y$ d'inconnue $x\in E$:

$$\begin{aligned} g(x)=y \iff x+1-\frac{1}{x-1}=y \iff \frac{(x+1)(x-1)-1}{x-1}=y &\iff x^2-2=yx-y \\ &\iff x^2-yx+y-2=0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut :

$$y^2-4(y-2)=y^2-4y+8=(y-2)^2+4>0$$

donc l'équation admet deux racines réelles, à savoir :

$$x_-=\frac{y-\sqrt{y^2-4y+8}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_+=\frac{y+\sqrt{y^2-4y+8}}{2}$$

D'après la question 3.(a), on a :

$$x_+>\frac{y+(2-y)}{2}=1 \qquad \text{et} \qquad x_-<\frac{y-(y-2)}{2}=1$$

car (pour x_-), on a également montré que $\sqrt{y^2-4y+8}>y-2$. Ainsi, $x_-\notin E$ et $x_+\in E$. On a donc montré que y admet un unique antécédent par l'application g dans E, à savoir x_+. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{pour } E=]1,+\infty[, \text{ l'application } g \text{ est bijective et } g^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad]1,+\infty[\\ y & \longmapsto \quad \dfrac{y+\sqrt{y^2-4y+8}}{2} \end{cases}}$$

Remarque : on peut également choisir $E=]-\infty,1[$. L'application réciproque g^{-1} est alors l'application qui à $y\in\mathbb{R}$ associe x_-.

Exercice 2.

1. On suppose que $g\circ f$ est injective. Montrons que f est injective, *i.e.* que :

$$\forall x,y\in E,\ f(x)=f(y) \implies x=y$$

Soient $x,y\in E$ tels que $f(x)=f(y)$. Alors $g(f(x))=g(f(y))$, *i.e.* $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$. Or l'application $g\circ f$ est injective donc $x=y$. Ainsi, f est injective. Finalement :

$$\boxed{\text{si l'application } g\circ f \text{ est injective, alors } f \text{ est injective}}$$

2. Supposons que l'application $g\circ f$ soit surjective. Montrons que $g: F\longrightarrow G$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall z\in G,\ \exists\, y\in F,\ g(y)=z$$

Soit $z\in G$. L'application $g\circ f: E\longrightarrow G$ est surjective et $z\in G$ donc il existe $x\in E$ tel que $z=(g\circ f)(x)$, *i.e.* $z=g(f(x))$. Ainsi, $f(x)\in F$ est un antécédent de z par l'application g dans F. Donc g est surjective. Finalement :

1. De même, on a $|y-2|\geqslant y-2$, inégalité utile à la question 3.(b) pour justifier que $x_-<1$.

$$\boxed{\text{si l'application } g \circ f \text{ est surjective, alors } g \text{ est surjective}}$$

3. On raisonne par double implication.
   - ⋆ Si les applications f, g et h sont bijectives, alors on sait d'après le cours que les applications composées $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
   - ⋆ On suppose que les applications $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. En particulier :
     — l'application $h \circ g$ est injective donc g est injective (d'après la question 1.) ;
     — l'application $g \circ f$ est surjective donc g est surjective (d'après la question 2.).

     Ainsi, g est bijective. Donc g^{-1} existe et est bijective (d'après le cours). À nouveau, comme la composition de deux applications bijectives est une application bijective, les applications [2] :

$$f = g^{-1} \circ (g \circ f) \qquad \text{et} \qquad h = (h \circ g) \circ g^{-1}$$

     sont bijectives. On a démontré que les applications f, g et h sont bijectives.

   Finalement :

$$\boxed{(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives}) \iff (f, g \text{ et } h \text{ bijectives})}$$

4. (a) Soit $X \in \mathscr{P}(B)$. Montrons que $f(f(^{-1}(X)) \subset X$. Soit $y \in f(f^{-1}(X))$.
   - ⋆ Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, il existe $x \in f^{-1}(X)$ tel que $y = f(x)$.
   - ⋆ Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, comme $x \in f^{-1}(X)$, on a $f(x) \in X$, *i.e.* $y \in X$.

   Ceci démontre l'inclusion $f(f(^{-1}(X)) \subset X$. Ainsi :

$$\boxed{\forall X \in \mathscr{P}(B), \qquad f(f^{-1}(X)) \subset X}$$

   Considérons l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$ et la partie $X = \{0\}$ de $\mathbb{R}$. Comme 0 n'admet pas d'antécédent par la fonction f dans $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$. Ensuite :

$$f(f^{-1}(\{0\})) = f(\varnothing) = \varnothing \neq \{0\}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{l'inclusion } X \subset f(f(^{-1}(X)) \text{ est fausse en général}}$$

   (b) On raisonne par double implication.
   - ⋆ On suppose que f est surjective. Montrons que :

$$\forall X \in \mathscr{P}(B), \qquad f(f^{-1}(X)) = X$$

     Soit $X \in \mathscr{P}(B)$. On a déjà démontré que $f(f^{-1}(X)) \subset X$ à la question 4.(a). Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in X$. On sait que $f : A \longrightarrow B$ est surjective et on a $y \in B$ (puisque $y \in X$ et $X \subset B$) donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $y \in X$ donc, par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, on a $x \in f^{-1}(X)$. Ainsi, $y = f(x) \in f(f(^{-1}(X))$. On a donc l'inclusion $X \subset f(f^{-1}(X))$. Par double inclusion, on peut conclure que $f(f^{-1}(X)) = X$.
   - ⋆ On suppose que :

$$\forall X \in \mathscr{P}(B), \qquad f(f^{-1}(X)) = X$$

     Montrons que f est surjective. Soit $y \in B$. Comme $\{y\} \in \mathscr{P}(B)$, on sait par hypothèse que $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$. Ainsi, $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$ donc il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, x est un antécédent de y par l'application f dans A (on a $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset A$). L'application f est donc surjective.

   Finalement :

$$\boxed{(f \text{ surjective}) \iff (\forall X \in \mathscr{P}(B),\ f(f(^{-1}(X)) = X)}$$

2. Égalités immédiates en utilisant l'associativité de la composition.

Exercice 3.

1. On raisonne par double implication.
   - ⋆ On suppose que f est bijective. Montrons que :
   $$\forall X \in \mathscr{P}(E), \qquad f(E \setminus X) = F \setminus f(X)$$
   Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Montrons l'égalité $f(E \setminus X) = F \setminus f(X)$ en raisonnant par double inclusion.
     - — Soit $y \in f(E \setminus X)$. Il existe $a \in E \setminus X$ tel que $y = f(a)$. Par l'absurde, supposons que $y \in f(X)$. Il existe alors $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $f(a) = f(x)$ et l'injectivité de f entraîne l'égalité $a = x$. Ainsi, $a \in X$, ce qui est exclu. On en déduit que $y \notin f(X)$, *i.e.* $y \in F \setminus f(X)$. Ceci démontre l'inclusion $f(E \setminus X) \subset F \setminus f(X)$.
     - — Soit $y \in F \setminus f(X)$. Comme f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $y = f(a)$. Si a appartient à X, alors $y = f(a)$ appartient à $f(X)$, ce qui est exclu. On en déduit que $a \in E \setminus X$. Ainsi, $y = f(a) \in f(E \setminus X)$. L'inclusion $F \setminus f(X) \subset f(E \setminus X)$ est donc démontrée.

   Par double inclusion, on peut conclure que $f(E \setminus X) = F \setminus f(X)$.
   - ⋆ On suppose que :
   $$\forall X \in \mathscr{P}(E), \qquad f(E \setminus X) = F \setminus f(X)$$
   Montrons que f est bijective.
     - — Montrons que f est injective, *i.e.* que :
     $$\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$
     Soient $x, x' \in E$ tel que $x \neq x'$. En appliquant l'hypothèse avec $X = \{x\} \in \mathscr{P}(E)$, on a :
     $$f(E \setminus \{x\}) = F \setminus f(\{x\})$$
     On a $x' \neq x$ donc $x' \in E \setminus \{x\}$ puis $f(x') \in f(E \setminus \{x\})$. L'égalité précécente entraîne donc que $f(x') \notin f(\{x\})$, *i.e.* $f(x') \notin \{f(x)\}$. Ainsi, $f(x') \neq f(x)$, ce qu'il fallait démontrer. On peut donc conclure que f est injective.
     - — L'hypothèse appliquée avec $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ nous donne :
     $$f(E) = f(E \setminus \varnothing) = F \setminus f(\varnothing) = F \setminus \varnothing = F$$
     Ainsi, f est surjective.

   On peut donc conclure que f est bijective.

   Finalement :
   $$\boxed{(f \text{ bijective}) \iff (\forall X \in \mathscr{P}(E),\ f(E \setminus X) = F \setminus f(X))}$$

2. (a) On raisonne par double implication.
   - ⋆ On suppose que $\tilde{f}$ est injective. Montrons que f est surjective, *i.e.* que :
   $$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$
   Soit $y \in F$. On a l'égalité $f^{-1}(f(f^{-1}(\{y\}))) = f^{-1}(\{y\})$ car, pour tout $x \in E$, on a :
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(f^{-1}(\{y\}))) &\iff f(x) \in f(f^{-1}(\{y\})) \\ &\iff \exists t \in f^{-1}(\{y\}),\ f(x) = f(t) \\ &\iff f(x) = y \qquad \text{(par définition de } f^{-1}(\{y\})) \\ &\iff x \in f^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$
   On a donc l'égalité $\tilde{f}(f(f^{-1}(\{y\}))) = \tilde{f}(\{y\})$. Or $\tilde{f}$ est injective donc $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. Par conséquent, $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$ donc il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$. Finalement, f est surjective.
   - ⋆ On suppose que f est surjective. Montrons que $\tilde{f}$ est injective, *i.e.* que :
   $$\forall B, C \in \mathscr{P}(F),\ \tilde{f}(B) = \tilde{f}(C) \implies B = C$$
   Soient $B, C \in \mathscr{P}(F)$. On suppose que $\tilde{f}(B) = \tilde{f}(C)$, *i.e.* que $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$. Soit $b \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $b = f(x)$. On a $f(x) \in B$, *i.e.* $x \in f^{-1}(B)$. L'égalité $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$ entraîne que $x \in f^{-1}(C)$, *i.e.* $b = f(x) \in C$. On a donc l'inclusion $B \subset C$, et comme B et C jouent des rôles symétriques, on a aussi $C \subset B$. Finalement, $B = C$ et l'application $\tilde{f}$ est injective.

$$\boxed{\tilde{f} \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est surjective}}$$

(b) On raisonne par double implication.

⋆ On suppose que $\tilde{f}$ est surjective. Montrons que f est injective, *i.e.* que :

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Soient $x, x' \in E$. On suppose que $f(x) = f(x')$. On a $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$ et on sait que $\tilde{f}$ est surjective donc il existe $B \in \mathscr{P}(F)$ tel que $\tilde{f}(B) = \{x\}$, *i.e.* tel que $\{x\} = f^{-1}(B)$. On a $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B$. Or $f(x') = f(x)$ donc $f(x') \in B$. Autrement dit, $x' \in f^{-1}(B)$, *i.e.* $x' \in \{x\}$. Finalement, $x = x'$ et l'application f est injective.

⋆ On suppose que f est injective. Montrons que $\tilde{f}$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \exists B \in \mathscr{P}(F),\ A = \tilde{f}(B) = f^{-1}(B)$$

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On a $f(A) \in \mathscr{P}(F)$. Il suffit de montrer que $A = f^{-1}(f(A))$. On procède par double inclusion.

— Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in f(A)$ et donc $a \in f^{-1}(f(A))$ (par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application). Ainsi, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

— Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Or f est injective donc $x = a$. Ainsi, $x \in A$. Ceci démontre l'inclusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Finalement, on a l'égalité $f^{-1}(f(A)) = A$ (*i.e.* $A = \tilde{f}(f(A))$) et l'application $\tilde{f}$ est surjective.

Ainsi :

$$\boxed{\tilde{f} \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est injective}}$$

3. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une application $\varphi : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ qui soit surjective. Considérons l'ensemble :

$$Y = \big\{x \in E \,\big|\, x \notin \varphi(x)\big\} \in \mathscr{P}(E)$$

Comme φ est surjective, il existe $t \in E$ tel que $\varphi(t) = Y$. On a donc :

$$\varphi(t) = \big\{x \in E \,\big|\, x \notin \varphi(x)\big\}$$

Sachant que $\varphi(t)$ est une partie de E, on a soit $t \in \varphi(t)$, soit $t \notin \varphi(t)$. Les deux cas sont en contradiction avec la définition de Y. Finalement :

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'application surjective de } E \text{ sur } \mathscr{P}(E)}$$