Devoir Maison 4

un corrigé

Exercice 1.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ sont évidentes car $\dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. Par ailleurs, $x-1 \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$. On traite la limite en 1^+ de la même manière. On en déduit que :

$$\boxed{f(]1, +\infty[) = \mathbb{R}}$$

Déterminons maintenant $f^{-1}([1, +\infty[)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([1, +\infty[) \iff f(x) \in [1, +\infty[&\iff x + 1 - \frac{1}{x-1} \geqslant 1 \\ &\iff x - \frac{1}{x-1} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2 - x - 1}{x-1} \geqslant 0 \\ &\iff x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2 - x - 1}{x-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{f^{-1}([1, +\infty[) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$$

2. D'après l'étude précédente, le nombre $1 \in \mathbb{R}$ admet deux antécédents (distincts) par f dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, à savoir $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective (elle n'est donc pas bijective)}}$$

Par contre, d'après la question 1., on a $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{f \text{ est surjective}}$$

3. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$y^2 - 4y + 8 = (y-2)^2 + 4 > (y-2)^2$$

donc, par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{y^2 - 4y + 8} > \sqrt{(y-2)^2} \qquad i.e. \qquad \sqrt{y^2-4y+8} > |y-2|$$

Or on sait que [1] :

$$|y-2| = \max(y-2, -(y-2)) = \max(y-2, 2-y) \geqslant 2-y$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{y^2-4y+8} > 2-y}$$

(b) Posons $E =]1, +\infty[$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $g(x) = y$ d'inconnue $x \in E$:

$$\begin{aligned} g(x) = y \iff x + 1 - \frac{1}{x-1} = y \iff \frac{(x+1)(x-1)-1}{x-1} = y &\iff x^2 - 2 = yx - y \\ &\iff x^2 - yx + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut :

$$y^2 - 4(y-2) = y^2 - 4y + 8 = (y-2)^2 + 4 > 0$$

donc l'équation admet deux racines réelles, à savoir :

$$x_- = \frac{y - \sqrt{y^2-4y+8}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_+ = \frac{y + \sqrt{y^2-4y+8}}{2}$$

D'après la question 3.(a), on a :

$$x_+ > \frac{y + (2-y)}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_- < \frac{y - (y-2)}{2} = 1$$

car (pour x_-), on a également montré que $\sqrt{y^2-4y+8} < y-2$. Ainsi, $x_- \notin E$ et $x_+ \in E$. On a donc montré que y admet un unique antécédent par l'application g dans E, à savoir x_+. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{pour } E =]1, +\infty[, \text{ l'application } g \text{ est bijective et } g^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]1, +\infty[\\ y & \longmapsto & \dfrac{y + \sqrt{y^2-4y+8}}{2} \end{array} \right.}$$

Remarque : on peut également choisir $E =]-\infty, 1[$. L'application réciproque g^{-1} est alors l'application qui à $y \in \mathbb{R}$ associe x_-.

Exercice 2.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective, *i.e.* que :

$$\forall x, y \in E, \qquad f(x) = f(y) \implies x = y$$

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$, *i.e.* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Or l'application $g \circ f$ est injective donc $x = y$. Ainsi, f est injective. Finalement :

$$\boxed{\text{si l'application } g \circ f \text{ est injective, alors } f \text{ est injective}}$$

2. Supposons que l'application $g \circ f$ soit surjective. Montrons que $g : F \longrightarrow G$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall z \in G, \ \exists y \in F, \ g(y) = z$$

Soit $z \in G$. L'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective et $z \in G$ donc il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$, *i.e.* $z = g(f(x))$. Ainsi, $f(x) \in F$ est un antécédent de z par l'application g dans F. Donc g est surjective. Finalement :

1. De même, on a $|y-2| \geqslant y-2$, inégalité utile à la question 3.(b) pour justifier que $x_- < 1$.

$$\boxed{\text{si l'application } g \circ f \text{ est surjective, alors } g \text{ est surjective}}$$

3. On raisonne par double implication.
   - ⋆ Si les applications f, g et h sont bijectives, alors on sait d'après le cours que les applications composées $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
   - ⋆ On suppose que les applications $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. En particulier :
     - — l'application $h \circ g$ est injective donc g est injective (d'après la question 1.) ;
     - — l'application $g \circ f$ est surjective donc g est surjective (d'après la question 2.).

     Ainsi, g est bijective. Donc g^{-1} existe et est bijective (d'après le cours). À nouveau, comme la composition de deux applications bijectives est une application bijective, les applications[2] :

     $$f = g^{-1} \circ (g \circ f) \qquad \text{et} \qquad h = (h \circ g) \circ g^{-1}$$

     sont bijectives. On a démontré que les applications f, g et h sont bijectives.

   Finalement :

   $$\boxed{(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \iff (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives})}$$

Exercice 3.

On raisonne par double implication.

- ⋆ Supposons que f soit injective. Montrons que :

  $$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

  Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$. On raisonne par double inclusion.
  - — On a $X \cap Y \subset X$ et $X \cap Y \subset Y$. Donc $f(X \cap Y) \subset f(X)$ et $f(X \cap Y) \subset f(Y)$, ce qui implique l'inclusion $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
  - — Montrons maintenant que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Soit $z \in f(X) \cap f(Y)$. Alors $z \in f(X)$ et $z \in f(Y)$. Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que :

    $$z = f(x) \qquad \text{et} \qquad z = f(y)$$

    En particulier, $f(x) = f(y)$ et, comme f est injective, on a l'égalité $x = y$. Ainsi, $x \in X \cap Y$ et comme $z = f(x)$, on peut conclure que $z \in f(X \cap Y)$. On a donc l'inclusion $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$.

  Finalement, on a bien l'égalité $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
- ⋆ On suppose que :

  $$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

  Montrons que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. Considérons les parties $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ de E. D'après notre hypothèse, on a :

  $$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \qquad \textit{i.e.} \qquad f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\})$$

  soit encore[3] :

  $$f(\{x\} \cap \{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \{f(x)\}$$

  car on sait que $f(x) = f(y)$. Si $x \neq y$, alors :

  $$\{x\} \cap \{y\} = \varnothing \qquad \text{et alors} \qquad f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\varnothing) = \varnothing,$$

  ce qui est absurde. Donc $x = y$. On peut donc conclure que f est injective.

Finalement :

$$\boxed{(f \text{ est injective}) \iff (\forall X, Y \in \mathscr{P}(E),\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y))}$$

---

2. Égalités immédiates en utilisant l'associativité de la composition.
3. En effet, $f(\{x\}) = \{f(t) \mid t \in \{x\}\} = \{f(t) \mid t = x\} = \{f(x)\}$ (*l'image d'un singleton par une application est un singleton*).