Devoir Maison 4

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

On considère l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array}\right.$.

1. Calculer $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}([1,+\infty[)$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
3. (a) Montrer que :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{y^2-4y+8} > 2-y$$
Indication : on pourra utiliser l'identité $y^2-4y+8=(y-2)^2+4$.

   (b) Déterminer un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ tel que l'application $g : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array}\right.$ soit bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 2.

Soient A, B, C et D quatre ensembles non vides, $f \in B^A$, $g \in C^B$ et $h \in D^C$.

1. Montrer que si l'application $g\circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si l'application $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que :
$$(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives}) \iff (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$$

Exercice 3 (facultatif).

Soient E et F deux ensembles non vides et $f \in F^E$. Montrer que f est injective si et seulement si :
$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$$