

DEVOIR MAISON 4

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{4x-3}{x^2+1} \end{cases}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
2. Déterminer $f([1, +\infty[)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}([-2, 2])$.
3. Démontrer que l'application :

$$g : \begin{cases} \left[-\frac{1}{2}, 2\right] & \longrightarrow & f\left(\left[-\frac{1}{2}, 2\right]\right) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

est bijective et déterminer son application réciproque g^{-1} .

Exercice 2.

Soient E et F deux ensembles non vides et $f \in F^E$. On considère les trois assertions suivantes :

(P_1) f est injective ;

(P_2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(P_3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap B = \emptyset \implies f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Montrer que les assertions (P_1) , (P_2) et (P_3) sont équivalentes.

Indication : il suffit de montrer les implications suivantes :

$$(P_1) \implies (P_2) \implies (P_3) \implies (P_1)$$

Exercice 3 (facultatif).

Soient E et F deux ensembles non vides et $f \in F^E$. On considère les applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{cases}$$

1. Montrer les équivalences :

$$f \text{ injective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \psi \text{ surjective}$$

2. Montrer les équivalences :

$$f \text{ surjective} \iff \varphi \text{ surjective} \iff \psi \text{ injective}$$