

DEVOIR MAISON 3

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer les sommes et le produit suivants :

$$A = \sum_{i=0}^n (n+1-i)^2, \quad B = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}}, \quad C = \sum_{k=0}^n (-1)^k 3^{n-k}, \quad D = \prod_{k=1}^n \frac{2^k}{k^2}$$

$$E = \sum_{\ell=2}^n \ln \left(\frac{\ell^2}{\ell^2 - 1} \right), \quad F = \sum_{1 \leq p \leq q \leq n} \frac{p}{q}, \quad G = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) \quad \text{et} \quad H = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} 2^{2p+1}$$

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que¹ :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Justifier que :

$$\frac{1 - (1-x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = - \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

3. En calculant l'intégrale entre 0 et 1 de chacune des expressions ci-dessus, conclure quant à la formule annoncée.

1. On peut aussi démontrer cette formule en procédant par récurrence sur l'entier n (cf. exercice 16 du TD3).