DEVOIR MAISON 3

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}, \qquad T = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2}, \qquad U = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell} 2^{2\ell-1}}{3^{\ell}} \qquad \text{et} \qquad V = \sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \min(k, \ell)$$

Exercice 2.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

On propose deux démonstrations.

1. *Première méthode.*
   Démontrer la formule annoncée en procédant par récurrence.
2. *Deuxième méthode.*
   On considère la fonction polynomiale P définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \frac{x^2}{4}(x-1)^2$$

   et, pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

   (a) Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = x^3$$

   (b) En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = P(n+1) - P(0)$$

   (c) Conclure.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $T_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

Exercice 3 (facultatif).

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$$