Devoir Maison 3

un corrigé

Exercice 1.

- En utilisant l'expression conjuguée, on a :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1},$$

la dernière somme étant télescopique.

- Le changement d'indice $k = j+2$ fournit :

$$T = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - 1 - n = (1+1)^n - 1 - n = 2^n - 1 - n$$

en utilisant la formule du binôme de Newton.

- On a :

$$U = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell \left(2^2\right)^\ell}{3^\ell} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{n} \left(-\frac{4}{3}\right)^\ell = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{14}\left[1-\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right]$$

- Par définition du minimum, on a :

$$V = \sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \min(k,\ell) + \sum_{1 \leqslant \ell < k \leqslant n} \min(k,\ell) = \underbrace{\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} k}_{\text{notée } V_1} + \underbrace{\sum_{1 \leqslant \ell < k \leqslant n} \ell}_{\text{notée} V_2}$$

Or :

$$V_1 = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} k = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 + \sum_{\ell=1}^{n} \ell\right)$$

et :

$$V_2 = \sum_{k=2}^{n} \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell = \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

Ainsi :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Finalement :

$$\boxed{S = \sqrt{n+1}, \qquad T = 2^n - n - 1, \qquad U = \frac{3}{14}\left[1-\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right] \qquad \text{et} \qquad V = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 2.

1. (a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{N+1}(x) - S_N(x) = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \frac{x^{N+1}}{N+1} \geqslant 0$$

car $x^{N+1} \geqslant 0$ (en effet, $x \geqslant 0$) et $N+1 > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (S_N(x))_{N\geqslant 1} \text{ est croissante}}$$

(b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n}\leqslant 1 \qquad \text{puis (en multipliant par } x^n\geqslant 0) \qquad \frac{x^n}{n}\leqslant x^n$$

En sommant les inégalités, il vient :

$$S_N(x)\leqslant \sum_{n=1}^{N} x^n = x\times\frac{1-x^N}{1-x}\leqslant\frac{x}{1-x}$$

car $1-x^N\leqslant 1$ et $\dfrac{x}{1-x}\geqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\qquad S_N(x)\leqslant\frac{x}{1-x}}$$

La suite $(S_N(x))_{N\geqslant 1}$ est croissante et majorée (par $x/(1-x)$) donc on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_N(x))_{N\geqslant 1} \text{ est convergente}}$$

2. (a) i. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $t\in[0,x]$, on a (par croissance de la fonction $u\longmapsto u^N$ sur $\mathbb{R}_+$) :

$$0\leqslant t^N\leqslant x^N$$

et $1-t\geqslant 1-x$ puis (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$0\leqslant\frac{1}{1-t}\leqslant\frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{\forall t\in[0,x],\qquad 0\leqslant\frac{t^N}{1-t}\leqslant\frac{x^N}{1-x}}$$

ii. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente et la propriété de croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0\leqslant\int_0^x\frac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{x^N}{1-x}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^x\frac{x^N}{1-x}\,\mathrm{d}t=\frac{x^N}{1-x}\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=\frac{x^N}{1-x}\Big[t\Big]_0^x=\frac{x^{N+1}}{1-x}$$

On obtient donc :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\qquad 0\leqslant I_N(x)\leqslant\frac{x^{N+1}}{1-x}$$

Or $\dfrac{x^{N+1}}{1-x}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$ (car $x\in]0,1[$) donc le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{I_N(x)\xrightarrow[N\to+\infty]{}0}$$

(b) On a :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x=\frac{x^n}{n}}$$

car $0^n=0$ (en effet, $n\geqslant 1$). Soit $N\in\mathbb{N}^*$. L'égalité précédente permet d'écrire que :

$$\begin{aligned}
S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t&=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{N}t^{n-1}\right)\mathrm{d}t &&\text{(linéarité de l'intégrale)}\\
&=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{N-1}t^k\right)\mathrm{d}t &&\text{(changement d'indice } k=n-1)\\
&=\int_0^x\frac{1-t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t &&\text{(en effet, } t\neq 1 \text{ car } 0\leqslant t\leqslant x<1)
\end{aligned}$$

On utilise ensuite la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x - I_N(x)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad S_N(x) = -\ln(1-x) - I_N(x)}$$

(c) Sachant que $I_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, la question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_N(x))_{N\geqslant 1} \text{ admet pour limite } -\ln(1-x) \text{ quand } N \text{ tend vers } +\infty}$$

3. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n+1} \\
&= S_N(x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{(car } x \neq 0\text{)} \\
&= S_N(x) - \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{N+1} \frac{x^k}{k} \qquad \text{(changement d'indice } k = n+1\text{)} \\
&= S_N(x) - \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{x^k}{k} - x\right)
\end{aligned}$$

On conclut donc que :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad T_N(x) = S_N(x) - \frac{S_{N+1}(x) - x}{x}}$$

(b) D'après la question 2.(c), on a $S_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(1-x)$ donc $S_{N+1}(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(1-x)$ puis :

$$T_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x) + x}{x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (T_N(x))_{N\geqslant 1} \text{ est convergente de limite } \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x}}$$

Exercice 3.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k-j} &= \sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{\ell} \qquad \text{(changement d'indice } \ell = k-j\text{)} \\
&= \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} \frac{1}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=\ell+1}^{n} \frac{1}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell}\sum_{k=\ell+1}^{n} 1 \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} \times (n-\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \times (n-\ell)
\end{aligned}$$

car le sommant est nul si $\ell = n$. Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j} = n\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} 1 = nH_n - n$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j} = n(H_n - 1)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} H_k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k+1} - \sum_{\ell=2}^{n+1}\frac{H_{\ell-1}}{\ell+1} \qquad \text{(changement d'indice } \ell = k+1\text{)} \\
&= \frac{H_1}{2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{H_k - H_{k-1}}{k+1} - \frac{H_n}{n+1} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{H_n}{n+1}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{n - H_n}{n+1}}$$

2. (a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$$

En effet, on sait que cette égalité est vraie si k est un entier supérieur ou égal à $m+1$. Elle l'est également si $k = m$ (puisque $1 + 0 = 1$) et si $k < m$ (tous les coefficients binomiaux sont nuls dans ce cas). On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}\right] = \binom{n+1}{m+1} - \binom{0}{m+1},$$

la somme obtenue étant télescopique. Comme $m+1 > 0$, on a $\binom{0}{m+1} = 0$ et donc :

$$\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}}$$

(b) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k = \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{\ell} &= \sum_{1\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{m}\frac{1}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{m} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{k}{m}\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\left[\binom{n+1}{m+1} - \binom{\ell}{m+1}\right]
\end{aligned}$$

On remarque que ce sommant est nul pour $\ell = n+1$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell} \left[\binom{n+1}{m+1} - \binom{\ell}{m+1} \right] \\
&= \binom{n+1}{m+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell} \binom{\ell}{m+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{\ell-1}{m} \qquad \text{(en utilisant la formule du pion)} \\
&= \binom{n+1}{m+1} H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} \qquad \text{(changement d'indice } k = \ell - 1\text{)}
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la question précédente :

$$\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right)}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell} = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\ell} &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \sum_{k=\ell}^{n} 1 \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \times (n - \ell + 1) \\
&= (n+1) \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1) H_n - n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k^2 = \sum_{k=1}^{n} H_k \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell} = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \frac{H_k}{\ell} &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{H_k}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \sum_{k=\ell}^{n} H_k \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} H_k}_{\ell=1} + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell} \left(\sum_{k=1}^{n} H_k - \sum_{k=1}^{\ell-1} H_k \right)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k^2 &= (n+1) H_n - n + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell} \big((n+1) H_n - n - \ell H_{\ell-1} + \ell - 1 \big) \\
&= (n+1) H_n - n + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell} \big((n+1)(H_n - 1) + \ell (1 - H_{\ell-1}) \big) \\
&= (n+1) H_n - n + (n+1)(H_n - 1) \underbrace{\sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell}}_{= H_n - 1} + \sum_{\ell=2}^{n} (1 - H_{\ell-1})
\end{aligned}$$

En utilisant la linéarité de la somme et le changement d'indice $k = \ell - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} H_k^2 &= (n+1)H_n - n + (n+1)(H_n - 1)^2 + (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} H_k \\ &= (n+1)H_n^2 - (n+1)H_n + n - \sum_{k=1}^{n} H_k + H_n \\ &= (n+1)H_n^2 - nH_n + n - (n+1)H_n + n,\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la question précédente. On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n}$$

Remarque : on peut aussi raisonner par récurrence.

Exercice 4.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction polynomiale) et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i a_j x^{i+j-1} &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j x^i x^j \\ &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \sum_{j=1}^{n} a_j x^j \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \right)^2 \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \geqslant f(0)$$

Or $f(0) = 0$ (car pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $i + j \geqslant 2$ donc $0^{i+j} = 0$) donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \geqslant 0$$

Pour $x = 1 \in \mathbb{R}_+$, on en déduit l'inégalité annoncée :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geqslant 0}$$