

DEVOIR MAISON 3

un corrigé

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

★ Calcul de A

Le changement d'indice $j = n + 1 - i$ fournit :

$$A = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

★ Calcul de B

On utilise l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})} = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{1} - \sqrt{0}) \quad (\text{somme télescopique}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$B = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 1}{2}$$

★ Calcul de C

On a :

$$C = 3^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^k} = 3^n \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 3^n \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 3^n \times \frac{3}{4} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\right)$$

Ainsi :

$$C = \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{4}$$

★ Calcul de D

D'après les propriétés du produit, on a :

$$D = \frac{\prod_{k=1}^n 2^k}{\prod_{k=1}^n k^2}$$

Or :

$$\prod_{k=1}^n k^2 = 1^2 \times 2^2 \times \cdots \times n^2 = (1 \times 2 \times \cdots \times n)^2 = (n!)^2$$

et :

$$\prod_{k=1}^n 2^k = 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

donc :

$$D = \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n!)^2}$$

★ Calcul de E

On a :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\ell=2}^n \left[\ln(\ell^2) - \ln((\ell-1)(\ell+1)) \right] = \sum_{\ell=2}^n \left[2 \ln(\ell) - \ln(\ell-1) - \ln(\ell+1) \right] \\ &= \sum_{\ell=2}^n \left[\ln(\ell) - \ln(\ell-1) \right] + \sum_{\ell=2}^n \left[\ln(\ell) - \ln(\ell+1) \right] \\ &= (\ln(n) - \ln(1)) + (\ln(2) - \ln(n+1)) \end{aligned}$$

car les deux dernières sommes sont télescopiques. Ainsi :

$$\boxed{E = \ln(n) - \ln(n+1) + \ln(2)}$$

★ Calcul de F

On a (la somme F est *triangulaire*) :

$$\begin{aligned} F &= \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^q \frac{p}{q} = \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \sum_{p=1}^q p = \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \times \frac{q(q+1)}{2} = \sum_{q=1}^n \frac{q+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n q + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \times n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{F = \frac{n(n+3)}{4}}$$

★ Calcul de G

On a :

$$\begin{aligned} G &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (i+j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i + j \sum_{i=1}^j 1 \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + j \times j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{3j^2 + j}{2} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{G = \frac{n(n+1)^2}{2}}$$

★ Calcul de H

Le changement d'indice $q = p - 1$ fournit :

$$H = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} 2^{2(q+1)+1} = 8 \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} 4^q = 8 \times (4+1)^n$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$\boxed{H = 8 \times 5^n}$$

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $x \neq 0$, on a $1 - x \neq 1$ donc, en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p = \frac{1 - (1-x)^{(n-1)+1}}{1 - (1-x)} = \frac{1 - (1-x)^n}{x}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1 - (1-x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

2. La fonction f étant une fonction polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} \times kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{k-1} \quad (*)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \neq 0$

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-x)^k \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \times ((-x+1)^n - 1) \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \frac{(1-x)^n - 1}{x} \\ &= - \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p \end{aligned}$$

d'après la question 1.

★ **Deuxième cas :** $x = 0$

Revenons à (*) et évaluons en 0. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on sait que $0^j = 0$ tandis que $0^0 = 1$ donc :

$$f'(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k 0^{k-1} = \underbrace{\binom{n}{1} \times (-1) \times 0^0}_{-n} + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^k 0^{k-1}}_{=0} = -n$$

Par ailleurs :

$$- \sum_{p=0}^{n-1} (1-0)^p = - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = -n = f'(0)$$

L'égalité est donc également vraie pour $x = 0$.

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = - \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 \left(- \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p \right) dx$$

Or :

$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = f(1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k}$$

car $f(0) = 0$ (puisque pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $0^k = 0$) et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(- \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p \right) dx &= - \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^1 (1-x)^p dx = - \sum_{p=0}^{n-1} \left[- \frac{(1-x)^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 \\ &= - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

En multipliant par -1 , on obtient bien (puisque : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(-1) \times (-1)^k = (-1)^{k+1}$) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$