Devoir Maison 3

un corrigé

Exercice 1.

- En utilisant l'expression conjuguée, on a :

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}=\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+1},$$

la dernière somme étant télescopique.

- Le changement d'indice $k=j+2$ fournit :

$$T=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}-1-n=(1+1)^n-1-n=2^n-1-n$$

en utilisant la formule du binôme de Newton.

- On a :

$$U=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell\left(2^2\right)^\ell}{3^\ell}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n}\left(-\frac{4}{3}\right)^\ell=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{3}{14}\left[1-\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right]$$

- Par définition du minimum, on a :

$$V=\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\min(k,\ell)+\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}\min(k,\ell)=\underbrace{\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}k}_{\text{notée } V_1}+\underbrace{\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}\ell}_{\text{notée} V_2}$$

Or :

$$V_1=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}k=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2+\sum_{\ell=1}^{n}\ell\right)$$

et :

$$V_2=\sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell=\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)k}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

Ainsi :

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Finalement :

$$\boxed{S=\sqrt{n+1},\qquad T=2^n-n-1,\qquad U=\frac{3}{14}\left[1-\left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right]\qquad\text{et}\qquad V=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 2.

1. On procède par récurrence.
   - On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}k^3=0^3=0$ et $\displaystyle\left(\frac{0\times(0+1)}{2}\right)^2=0$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

D'après la relation de Chasles puis par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}P(x+1) - P(x) = \frac{(x+1)^2x^2 - x^2(x-1)^2}{4} &= \frac{(x(x+1) - x(x-1))(x(x+1) + x(x-1))}{4} \\ &= \frac{(x^2+x-x^2+x)(x^2+x+x^2-x)}{4} \\ &= x^3\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = x^3}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P(k+1) - P(k) = k^3$ d'après la question précédente. En sommant ces égalités, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} (P(k+1) - P(k)) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = S_n$$

La somme de gauche, qui est télescopique, est égale à $P(n+1) - P(0)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = P(n+1) - P(0)}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$P(n+1) - \underbrace{P(0)}_{=0} = \frac{(n+1)^2\big((n+1)-1\big)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

La question précédente permet donc de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}T_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{j(j+1)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)\big[3n(n+1) + 2(2n+1)\big]}{12}\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}}$$

Exercice 3.

On procède par récurrence.

- ⋆ On a :

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} - \frac{3\times 2}{2\times 2+1} = 1 + \frac{1}{4} - \frac{6}{5} = \frac{5}{4} - \frac{6}{5} = \frac{1}{20} > 0$$

donc l'inégalité est vérifiée au rang 2.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$. Montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} \qquad i.e. \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} > \frac{3n+3}{2n+3}$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{3n}{2n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant \dfrac{3n+3}{2n+3}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3n+3}{2n+3} &= \frac{3n(n+1)^2(2n+3) + (2n+1)(2n+3) - (3n+3)(2n+1)(n+1)^2}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\
&= \frac{3n(n^2+2n+1)(2n+3) + 4n^2+8n+3 - (3n+3)(2n+1)(n^2+2n+1)}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\
&= \frac{3n(2n^3+7n^2+8n+3) + 4n^2+8n+3 - (3n+3)(2n^3+5n^2+4n+1)}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\
&= \frac{6n^4+21n^3+28n^2+17n+3 - (6n^4+21n^3+27n^2+15n+3)}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\
&= \frac{n^2+2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. On a donc bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} > \frac{3n+3}{2n+3}$, ce qui signifie que l'inégalité est vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}}$$