

DEVOIR MAISON 2

un corrigé

Exercice 1.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 2}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $2x^2 > 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{2}$. On en déduit le tableau de variations de f suivant sur $\mathbb{R}_+^*$ (les limites en 0 et en $+\infty$ sont évidentes et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$) :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$\searrow \sqrt{2} \nearrow$	$+\infty$

- (b) On utilise un raisonnement par récurrence.

- ★ On a $2 \leq 4$ donc (par croissance de fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) on a aussi $\sqrt{2} \leq 2 = u_0$. L'inégalité est donc vérifiée au rang $n = 0$.
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq \sqrt{2}$. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$, on a $f(u_n) \geq f(\sqrt{2})$ i.e. $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$. L'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \sqrt{2}}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{u_n} - u_n \right) = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

Or on sait que $u_n \geq \sqrt{2}$ donc, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $u_n^2 \geq 2$ i.e. $2 - u_n^2 \leq 0$. Par ailleurs, $2u_n > 0$ donc (par quotient) $u_{n+1} - u_n \leq 0$. On en déduit donc que :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ; de plus, cette suite est minorée (par $\sqrt{2}$, cf. question 1.(b)) donc elle converge (d'après le théorème de la limite monotone)

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{u_n}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \geq \sqrt{2}$ (question 1.(b)) donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. En multipliant par $\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \geq 0$, on obtient :

$$\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

D'après la question 1.(b), on sait que $u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}}$$

4. On utilise un raisonnement par récurrence (l'inégalité de gauche à déjà été établie).

★ On a $u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \leq 1$ (en effet, $2 \geq 1$ donc $\sqrt{2} \geq 1$) et

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^0-1} = 1$$

donc l'inégalité est vérifiée au rang $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1}$. Montrons que $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}-1}$.

Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ (et d'après l'hypothèse de récurrence), on a :

$$(u_n - \sqrt{2})^2 \leq \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1}\right]^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2 \times (2^n-1)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}-2}$$

En multipliant ensuite par $\frac{1}{2\sqrt{2}} \geq 0$ et en utilisant la question 3., il vient :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}-2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}-1}$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1}}$$

5. Les inégalités obtenues à la question précédente se réécrivent, en ajoutant $\sqrt{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \leq u_n \leq \sqrt{2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1}$$

Comme $2\sqrt{2} > 1$, on a $\frac{1}{2\sqrt{2}} \in]0, 1[$ donc :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{puis} \quad \sqrt{2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}$$

Le théorème des gendarmes et les inégalités précédentes nous donnent donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } \sqrt{2}}$$

Exercice 2.

1. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$f(x^2 - y^2) = k(x^2 - y^2),$$

et d'autre part :

$$(x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y)(kx + ky) = k(x - y)(x + y) = k(x^2 - y^2)$$

donc $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f_k \text{ est solution de } (E)}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E).

(a) Par hypothèse sur f , on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

Le choix $x = y = 0 \in \mathbb{R}$ fournit l'égalité $f(0) = 0 \times (f(0) + f(0)) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

(b) Tout d'abord, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le choix $y = -x \in \mathbb{R}$ dans (E) nous donne :

$$\underbrace{f(x^2 - (-x)^2)}_{=f(0)} = (x - (-x))(f(x) + f(-x)) = 2x(f(x) + f(-x))$$

Or $f(0) = 0$ donc $2x(f(x) + f(-x)) = 0$.

★ Si $x \neq 0$, alors la dernière égalité nous donne $f(x) + f(-x) = 0$, i.e. $f(-x) = -f(x)$.

★ Si $x = 0$, on a clairement $f(-x) = -f(x)$ (puisque $f(0) = 0$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(-x) = -f(x)$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$$

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)) \quad (*)$$

et, en remplaçant y par $-y \in \mathbb{R}$ dans (E), on a aussi :

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2 - (-y)^2) = (x + y)(f(x) + f(-y))$$

i.e. (en utilisant l'imparité de f) :

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y)) \quad (**)$$

D'après (*) et (**), on a :

$$(x - y)(f(x) + f(y)) = (x + y)(f(x) - f(y)),$$

i.e. :

$$xf(x) + xf(y) - yf(x) - yf(y) = xf(x) - xf(y) + yf(x) - yf(y)$$

On en déduit que $2xf(y) = 2yf(x)$, soit encore $xf(y) = yf(x)$. Finalement :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad yf(x) = xf(y)}$$

(d) Le choix $y = 1 \in \mathbb{R}$ dans la relation obtenue à la question 2.(c) nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 \times f(x) = f(1)x$$

En posant $k = f(1) \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = kx) \quad \text{i.e.} \quad f = f_k$$

Finalement :

$$\boxed{\text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } f = f_k}$$

3. Nous venons de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : d'après la question 2., si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (E), alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f = f_k$.

★ **Synthèse** : d'après la question 1., pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction f_k est solution de E.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{les solutions de (E) sont les fonctions } f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}}$$