

DEVOIR MAISON 2

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

On introduit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \end{cases}$. La relation de récurrence précédente se réécrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.
 (b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq \sqrt{2}$.
 (c) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis justifier qu'elle converge.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

3. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^n - 1}$$

5. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2.

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)) \quad (E)$$

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{cases}$ est solution de (E).
2. Supposons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (E).
 (a) Déterminer la valeur de $f(0)$.
 (b) Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
 (c) En déduire que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad yf(x) = xf(y)$$

- (d) Conclure qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f = f_k$.
3. Conclure quant à l'ensemble des solutions de (E).