

DEVOIR MAISON 2

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

1. *Questions préliminaires.*

- (a) Déterminer le signe du trinôme $2x^2 - 3x - 9$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$ et factoriser ce trinôme.
 (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{x + 2} \geq \frac{3}{2}$$

Indication : on pourra calculer la différence $\frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{x + 2} - \frac{3}{2}$.

2. On considère maintenant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$$

- (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 3$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - 3 \geq \frac{3}{2}(x_n - 3)$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$$

- (d) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2.

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x$$

On procède par analyse-synthèse.

- Supposons que f soit une solution du problème.
 - Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
- Quelles sont les solutions du problème ?