

DEVOIR MAISON 17

un corrigé

Exercice 1.

1. On répète n fois la même épreuve (pour la secrétaire, le fait d'appeler un correspondant) dont le succès (à savoir joindre un correspondant donné) a pour probabilité $\frac{1}{3}$. Les épreuves sont mutuellement indépendantes et X représente le nombre de succès obtenus. On en déduit que :

$$X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{3}; \text{ on a donc } E(X) = \frac{n}{3} \text{ et } V(X) = \frac{2n}{9}$$

2. (a) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si $X = j$, alors la secrétaire a réussi à joindre j correspondants lors de la première série d'appels. Elle recommence l'expérience consistant à essayer de joindre chacun des $n - j$ autres correspondants. Comme à la question 1., on conclut que :

$$\text{la loi conditionnelle de } Y \text{ sachant } (X = j) \text{ est } \mathcal{B}\left(n - j, \frac{1}{3}\right)$$

- (b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $((X = j))_{0 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{j=0}^n P(Y = k | X = j)P(X = j)$$

Comme $X + Y \leq n$ (le nombre de correspondants que la secrétaire a réussi à joindre à l'issue des deux séries d'appels ne peut pas excéder n), on a $P(Y = k | X = j) = 0$ si $j > n - k$. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(Y = k) = \sum_{j=0}^{n-k} P(Y = k | X = j)P(X = j)$$

- (c) Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!} = \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n - k \rrbracket, \quad \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j}$$

- (d) L'ensemble des valeurs prises par Y est $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En exploitant les résultats obtenus dans les questions précédentes, on a (en posant $p = \frac{1}{3}$) :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} p^j ((1-p)^2)^{n-k-j} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^k (p + (1-p)^2)^{n-k} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \binom{n}{k} (p - p^2)^k (1 - (p - p^2))^{n-k} \end{aligned}$$

Finalement :

la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p - p^2 = \frac{2}{9}$

3. Par définition de Y , on a l'inégalité $Y \leq n - X$ (le nombre d'appel(s) que doit effectuer la secrétaire lors de la deuxième phase d'appels est $n - X$). En particulier, l'événement $(X = n, Y = 1)$ est impossible (la secrétaire ayant réussi à joindre tous les correspondants lors de la première phase d'appels) donc $P(X = n, Y = 1) = 0$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} P(X = n)P(Y = 1) &= \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \binom{n}{1} (p-p^2)(1-p+p^2)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{2n}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

donc $P(X = n, Y = 1) \neq P(X = n)P(Y = 1)$. Ainsi :

les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes

4. L'ensemble des valeurs prises par Z est $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ (en effet, Z correspond au nombre total de correspondants que la secrétaire a réussi à joindre en cumulant les deux séries d'appels). Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, comme $((X = j))_{0 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a :

$$\begin{aligned} P(Z = \ell) &= \sum_{j=0}^n P(Z = \ell | X = j) P(X = j) \\ &= \sum_{j=0}^n P(Y = \ell - j | X = j) P(X = j) \quad (\text{car } Z = X + Y) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} P(Y = \ell - j | X = j) P(X = j) \quad (\text{car } Y \geq 0) \end{aligned}$$

On utilise maintenant les questions 1. et 2.(a) (on pose toujours $p = \frac{1}{3}$) :

$$P(Z = \ell) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{n-j}{\ell-j} p^{\ell-j} (1-p)^{n-j-(\ell-j)} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Comme à la question 2.(c), on peut montrer que :

$$\forall j \in \llbracket 0, \ell \rrbracket, \quad \binom{n-j}{\ell-j} \binom{n}{j} = \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{j}$$

donc :

$$\begin{aligned} P(Z = \ell) &= \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (1-p)^{n-j} \\ &= \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{2n-2\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (1-p)^{\ell-j} \quad (\text{car } (1-p)^{n-j} = (1-p)^{\ell-j} (1-p)^{n-\ell}) \\ &= \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{2n-2\ell} (2-p)^{\ell} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \binom{n}{\ell} (2p - p^2)^{\ell} (1 - (2p - p^2))^{n-\ell} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres n et $2p - p^2 = \frac{5}{9}$

Exercice 2.

1. D'après le théorème de Fubini positif, on a (les égalités ont lieu dans $[0, +\infty]$) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ k \leq n}} |x^n| &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} |x|^n \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^k \sum_{n=k}^{+\infty} |x|^{n-k} \quad (\text{linéarité positive dans } [0, +\infty]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} |x|^\ell \quad (\text{changement d'indice } \ell = n - k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^k \times \frac{1}{1 - |x|} \quad (\text{car } |x| < 1) \\
 &= \frac{1}{1 - |x|} \times |x| \times \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^{k-1} \\
 &= \frac{|x|}{(1 - |x|)^2}
 \end{aligned}$$

en utilisant le changement d'indice $\ell = k - 1$ dans la dernière somme. La somme de la famille $(|x^n|)_{\substack{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ k \leq n}}$ appartenant à \mathbb{R}_+ , on peut conclure que :

la famille u est sommable

2. D'après le théorème de Fubini positif, on a aussi (en sommant dans l'autre sens) :

$$\sum_{\substack{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ k \leq n}} |x^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n |x|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n|x|^n$$

Comme la famille u est sommable, la dernière somme est finie. Autrement dit, la série $\sum_{n \geq 1} nx^n$ est absolument convergente, et donc convergente, ce qui signifie que :

la somme $S(x)$ est bien définie

On calcule la somme en utilisant le théorème de Fubini (pour les familles à valeurs dans \mathbb{C}) et le calcul est le même que celui mené à la question précédente (sans les modules) ; on obtient :

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$