Devoir Maison 17

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- **Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.**

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Une secrétaire effectue n appels vers n correspondants distincts. À chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est de $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de clients obtenus. Après ces n recherches, la secrétaire rappelle une deuxième fois chacun des $n-X$ clients qu'elle n'a pas obtenu la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors de la deuxième série d'appels. L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de Y.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
2. (a) Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=j)$.
   Indication : il n'y a aucun calcul à faire.

   (b) Justifier l'égalité :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad P(Y=k) = \sum_{j=0}^{n-k} P(Y=k \mid X=j)P(X=j)$$

   (c) Montrer que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall j \in [\![0,n-k]\!], \qquad \binom{n}{j}\binom{n-j}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$$

   (d) En déduire que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X+Y$.
   Indication : utiliser à nouveau le système complet d'événements associé à X.

Exercice 2.

Soit x un nombre complexe tel que $|x|<1$. On souhaite justifier l'existence et calculer la somme :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$$

On introduit la famille de nombres complexes $u = (x^n)_{\substack{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ k \leqslant n}}$.

1. Démontrer que la famille u est sommable en utilisant le théorème de Fubini.
2. Conclure quant à l'existence de $S(x)$ et déterminer sa valeur.