Devoir Maison 16

un corrigé

Exercice 1 (étude d'une famille de séries).

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   - ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n(n+1)\cdots(n+p) \geqslant n(n+1) \geqslant n^2 > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u(n,p) \leqslant \frac{1}{n^2}$$
   - ⋆ On sait que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$).
   - ⋆ Les séries $\sum_{n\geqslant 1} u(n,p)$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

   Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\sum_{n\geqslant 1} u(n,p)$ est convergente. Ainsi :
   $$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u(n,p) \text{ est convergente}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(somme télescopique)}$$
   Ainsi :
   $$\boxed{\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$$

   (b) On a :
   $$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{(X+1)(X+2) - 2X(X+2) + X(X+1)}{X(X+1)(X+2)} \times \frac{1}{2}$$
   i.e. :
   $$\boxed{\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}}$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \qquad \text{(sommes télescopiques)} \end{aligned}$$
   donc :
   $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}}$$
   On en déduit que :
   $$\boxed{\sigma(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u(n,p-1) - u(n+1,p-1) &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\cdots(n+p-1)(n+p)} \\ &= p \times \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} \\ &= pu(n,p) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = pu(n,p)}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} pu(n,p)}_{=p\sigma(p)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u(n,p-1) - u(n+1,p-1)\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(u(k,p-1) - u(k+1,p-1)\right) \end{aligned}$$

Or (la somme est télescopique) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(u(k,p-1) - u(k+1,p-1)\right) &= u(1,p-1) - u(n+1,p-1) \\ &= \frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times p} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{p\,!} \end{aligned}$$

On en déduit que $p\sigma(p) = \dfrac{1}{p\,!}$, *i.e.* :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \sigma(p) = \frac{1}{p \times p\,!}}$$

Exercice 2 (calcul d'une distance).

1. On suppose que $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
   - ⋆ Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle P + \lambda Q, R \rangle &= \sum_{k=0}^{n} (P + \lambda Q)(a_k) R(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (P(a_k) + \lambda Q(a_k)) R(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(a_k) R(a_k) + \lambda \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) R(a_k) \qquad \text{(linéarité de la somme)} \\ &= \langle P, R \rangle + \lambda \langle Q, R \rangle \end{aligned}$$

   L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc linéaire par rapport à la première variable.
   - ⋆ Pour tous $P, Q \in E$, on a :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k) = \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) P(a_k) = \langle Q, P \rangle$$

   Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. Comme elle est de plus linéaire par rapport à la première variable, cette application est bilinéaire.
   - ⋆ Soit $P \in E$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P(a_k)^2 \geqslant 0$ (car $P(a_k) \in \mathbb{R}$) donc :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0$$

   L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc positive.
   - ⋆ Soit $P \in E$. On suppose que $\langle P, P \rangle = 0$. Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous les sommants sont nuls donc :

$$(\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(a_k)^2 = 0) \qquad i.e. \qquad (\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(a_k) = 0)$$

   Ainsi, $a_0, \ldots, a_n$ sont des racines de P. Comme ces nombres sont deux à deux distincts par hypothèse, le polynôme P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or $\deg(P) \leqslant 0$ donc P est le polynôme nul. Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Supposons maintenant que les nombres $a_0, \dots, a_n$ ne soient pas deux à deux distincts. Il existe donc $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $i < j$ et $a_i = a_j$. Le polynôme $P = \prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} (X - a_k)$ appartient à E (on a $\deg(P) = n$) et :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} 0^2 = 0$$

et P n'est pas le polynôme nul. Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas définie et n'est donc pas un produit scalaire sur E. Finalement :

$$\boxed{\text{l'application } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E \text{ si et seulement si } a_0, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}}$$

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'écrit comme suit :

$$\boxed{\forall P, Q \in E, \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k) \right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)^2 \right)^{1/2}}$$

3. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k) \in E$ (les racines de P_i sont les nombres a_k pour $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$) donc, pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P_i, P_j \rangle &= \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} P_i(a_k) P_j(a_k) \right) + P_i(a_i) P_j(a_i) + P_i(a_j) P_j(a_j) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} 0 \times 0 + P_i(a_i) \times 0 + 0 \times P_j(a_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $P_i \perp P_j$. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc une base orthogonale de E (car de plus cette famille comporte $n+1 = \dim(E)$ vecteurs non nuls). De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle} = \left(\sum_{k=0}^{n} P_i(a_k)^2 \right)^{1/2} = |P_i(a_i)| = \left| \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k) \right|$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{une base orthonormale de } E \text{ est la famille des polynômes de Lagrange associés aux scalaires } a_0, \dots, a_n}$$

4. (a) Soit $P \in E$. On a :

$$P \in H \iff \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times 1 = 0 \iff \langle P, 1 \rangle = 0 \iff P \in \mathrm{Vect}(1)^{\perp}$$

On en déduit que $H = \mathrm{Vect}(1)^{\perp}$ est l'orthogonal dans E de la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^0 = 1$. Ainsi :

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \text{ dont un vecteur normal est le polynôme } 1}$$

(b) Soit $Q \in E$. Comme H est un hyperplan de E dont un vecteur normal est 1, on sait que :

$$\boxed{d(Q, H) = \frac{|\langle Q, 1 \rangle|}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) \right|}$$

Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite).

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff 1 - \ln(x) > 0 \qquad \text{car } x^2 > 0 \\
&\iff \ln(x) < 1 \\
&\iff x < \mathrm{e} \qquad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ (car $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.

(b) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4.

⋆ La fonction f est continue sur les segments $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$ (comme quotient de fonctions continues) donc elle est intégrable sur ces segments et les intégrales $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}x$ sont bien définies.

⋆ Par ailleurs, $k-1 \geqslant 3 > \mathrm{e}$ et donc les intervalles $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$ sont inclus dans l'intervalle $[\mathrm{e}\,,+\infty[$. Comme la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,,+\infty[$ (d'après la question 1. (a)), elle l'est aussi sur les intervalles $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$. On en déduit alors que :

- pour tout $x \in [k,k+1]$, on a l'inégalité $\dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$ et donc, par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens) :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}x$$

et comme par linéarité :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(k)}{k}\int_{k}^{k+1} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(k)}{k}$$

on a la première inégalité annoncée, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$.

- pour tout $x \in [k-1,k]$, on a l'inégalité $\dfrac{\ln(k)}{k} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x}$ et par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens), il vient par linéarité :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

ce qui fournit la deuxième inégalité, à savoir $\displaystyle\frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Finalement,

$$\boxed{\forall k \geqslant 4, \qquad \int_{k}^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x}$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. En sommant les inégalités obtenues à la question 1.(b) sur les entiers $k \in [\![4,n]\!]$, on obtient

$$\sum_{k=4}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{4}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \int_{3}^{n} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Or une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln^2(x)}{2}$ donc

$$\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_4^{n+1} \leqslant S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_3^{n}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leqslant S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{en posant } A = \dfrac{\ln^2(4)}{2},\ B = \dfrac{\ln(2)}{2} + \dfrac{\ln(3)}{3} \text{ et } C = \dfrac{\ln^2(3)}{2} \text{ on a pour tout } n \geqslant 4,\\[2ex] \dfrac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leqslant S_n - B \leqslant \dfrac{\ln^2(n)}{2} - C\end{array}}$$

(d) D'après la question 1.(c), on sait que :

$$\forall n \geqslant 4, \qquad S_n \geqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A\right) = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Alors $\ln(n) \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^2 &= \left(\frac{\ln\left(n\left[1+\frac{1}{n}\right]\right)}{\ln(n)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(1+X) = 0$ tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$ et donc :

$$\boxed{\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)}$$

(b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on sait d'après la question 1.(c) que :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} + B - C$$

et donc, en divisant par $\frac{\ln^2(n)}{2} > 0$,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} + \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} \leqslant \frac{2S_n}{\ln^2(n)} \leqslant 1 + \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln^2(n) = +\infty$ et $\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$ (question 2.(a)), on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} + \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)}\right) = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\frac{2S_n}{\ln^2(n)}\right)_{n\geqslant 4}$ est convergente de limite 1, ce qui se réécrit :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}}$$

3. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - S_n + \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2}\right)\end{aligned}$$

On sait que $t \longmapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$ est une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Comme $n \geqslant 3$, on a $n+1 \geqslant 4$ et donc, d'après la question 1.(b),

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{(n+1)-1}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$$

(b) D'après la question 3.(a), la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante. De plus, d'après la question 1.(c), on sait que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a :

$$S_n \geqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A \geqslant \frac{\ln^2(n)}{2} + B - A$$

car la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln^2(t)}{2}$ est croissante sur $[1,+\infty[$ et car $1 \leqslant n \leqslant n+1$ (on a $n \geqslant 4$), ce qui nous donne la minoration :

$$u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \geqslant B - A$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée (par $\min(u_3, B-A)$). D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente. Comme la convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes, on peut conclure finalement que :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est convergente}}$$

4. (a) On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la proposition

$$\mathcal{P}_n : \text{« } A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ »}$$

⋆ **Initialisation :** montrons que la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie. D'une part :

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 - \ln(2)\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} &= \frac{\ln(2)}{2} + \underbrace{\frac{\ln(1)}{1}}_{=0} - \underbrace{\frac{\ln(1)}{1}}_{=0} - \ln(2) \\ &= -\frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$A_2 = (-1)^0 \frac{\ln(1)}{1} + (-1)^1 \frac{\ln(2)}{2} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

et donc $S_2 - S_1 - \ln(2)\sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k} = A_2$, ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé). On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. La quantité

$$S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

notée $\mathcal{Q}$, est égale à :

$$S_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - S_n - \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{\ln(2)}{n+1}$$

d'après la relation de Chasles (pour les sommes). En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2)+\ln(n+1)}{2(n+1)} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(2)}{n+1} \\ &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \left(\frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} + \frac{\ln(2)}{2(n+1)}\right) \\ &= A_{2n} + (-1)^{2n}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= A_{2(n+1)} \end{aligned}$$

et donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

(b) En utilisant le développement asymptotique proposé dans l'égalité obtenue à la question 4.(a), il vient

$$A_{2n} \underset{+\infty}{=} S_{2n} - S_n - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) + \mathrm{o}(1)$$

On sait d'après la question 3.(b) que la suite u converge de limite notée ℓ donc on a l'égalité

$$u_n \underset{+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1) \qquad \text{ce qui se réécrit} \qquad S_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + \mathrm{o}(1)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &\underset{+\infty}{=} \left(\frac{\ln^2(2n)}{2} + \gamma + \mathrm{o}(1) \right) - \left(\frac{\ln^2(n)}{2} + \gamma + \mathrm{o}(1) \right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(2n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

puis, en utilisant les propriétés du logarithme,

$$\begin{aligned} A_{2n} &\underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(2) + 2\ln(2)\ln(n) + \ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) + \mathrm{o}(1) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2) + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par linéarité :

$$\begin{aligned} A_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\ &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \end{aligned}$$

On sait que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$ (question 4.(b)) tandis que la suite $\left(\frac{\ln(2n+1)}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de limite 0 par croissances comparées. D'après les opérations sur les limites, on peut en déduire que

$$\boxed{\text{la suite } (A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)}$$

(d) La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que ses deux suites extraites $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \dfrac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)\,;\text{ autrement dit, la série} \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} \text{ converge de somme } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)\end{array}}$$

Exercice 4 (endomorphismes préservant le produit scalaire).

1. (a) Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_u(\lambda x + y) = 2\frac{\langle \lambda x + y \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - (\lambda x + y) &= 2\frac{\lambda\langle x \mid u\rangle + \langle y \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - \lambda x - y \\ &= 2\frac{\lambda\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u + 2\frac{\langle y \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - \lambda x - y \\ &= \lambda\varphi_u(x) + \varphi_u(y) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\varphi_u \text{ est bien un endomorphisme de } E}$$

(b) On remarque déjà que $\varphi_u(u) = u$. De plus, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} (\varphi_u \circ \varphi_u)(x) &= \varphi_u\left(2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - x\right) \\ &= 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}\varphi_u(u) - \varphi_u(x) \qquad (\text{car } \varphi_u \in \mathscr{L}(E)) \\ &= 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u + x \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$. Donc :

$$\boxed{\varphi_u \text{ est un automorphisme de } E \text{ et } \varphi_u^{-1} = \varphi_u}$$

(c) Pour tout $x \in E$, on a (en utilisant la bilinéarité et la symétrie d'un produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(x) \rangle &= \left\langle 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - x \,\middle|\, 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - x \right\rangle \\ &= 4\frac{\langle x \mid u\rangle^2}{\langle u \mid u\rangle^2}\langle u \mid u\rangle - 4\frac{\langle x \mid u\rangle^2}{\langle u \mid u\rangle} + \langle x \mid x\rangle \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in E, \qquad \langle \varphi_u(x), \varphi_u(x) = \langle x, x\rangle}$$

(d) Soient $x, y \in E$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$< \varphi_u(x)|\varphi_u(y) >= \underbrace{4\frac{< x|u >< y|u >}{< u|u >^2} < u|u > -2\frac{< x|u >}{< u|u >} < u|y > -2\frac{< y|u >}{< u|u >} < x|u >}_{=0} + < x|y >$$

donc :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi_u \text{ conserve le produit scalaire}}$$

(e) Comme $D_u = \text{Vect}(u)$. On a :

$$\boxed{\varphi_u(D_u) = \text{Vect}(\varphi_u(u)) = \text{Vect}(u) = D_u}$$

Soit $x \in H_u$. Alors $x \perp u$ donc $< x|u >= 0$. On en déduit que $\varphi_u(x) = -x \in H_u$ (comme $x \in H_u$, on a $-x \in H_u$ car H_u est un sous-espace vectoriel de E). Ainsi :

$$\boxed{H_u \text{ est stable par } \varphi_u}$$

2. (a) Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $H = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X \mid u\rangle = 0\right\} = D_u^{\perp}$. Autrement dit :

$$\boxed{H^{\perp} = D_u \text{ est de dimension 1 et } \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}u\right) \text{ en est une base orthonormale}}$$

(b) Soit p' la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ et notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^3, p'(x) = \left\langle x \,\middle|\, \frac{u}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{u}{\sqrt{3}}$. En particulier, $p'(e_1) = \frac{1}{3}u = p'(e_2) = p'(e_3)$. Ainsi, la matrice de p' dans la base canonique est :

$$\boxed{M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Puis, la matrice M de la projection orthogonale p sur H dans la base canonique est :

$$\boxed{M = I_3 - M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

(c) Prenons $v = \frac{1}{\sqrt{3}}u$. Comme φ_v est la symétrie orthogonale par rapport à $D_v = H^{\perp}$, on a $\varphi_v = \text{id}_E - 2p$. La matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$\boxed{-I_3 + 2M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$