Devoir Maison 16

Exercice 1 (étude d'une famille de séries).

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u(n,p) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u(n,p)$ est convergente.

Pour tout entier naturel p non nul, on note $\sigma(p)$ la somme de cette série, i.e. :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n,p)$$

2. (a) Calculer $\sigma(1)$.
   (b) Calculer $\sigma(2)$.
3. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = pu(n,p)$$

4. En déduire la valeur de $\sigma(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Exercice 2 (calcul d'une distance).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si les nombres réels $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

2. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (*on écrira l'inégalité avec le symbole* $\sum$).
3. Déterminer (sans calculs) une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
4. On pose $H = \left\{ P \in E \,\middle|\, \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
   (a) Justifier que H est un hyperplan de E. Déterminer un vecteur normal à H.
   (b) Soit $Q \in E$. Déterminer la distance de Q à H.

Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite).

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

1. **Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4, on a :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
   (c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :
   $$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - A \leqslant S_n - B \leqslant \frac{\ln(n)^2}{2} - C$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. **Recherche d'un équivalent de S_n.**
   (a) Montrer que $\ln(n+1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)^2$.
   (b) En déduire que un équivalent S_n quand n tend vers $+\infty$.
3. **Étude asymptotique de la suite u définie par :**
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$$
   (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
   (b) En déduire que la suite u converge.

   Dans toute la suite de l'exercice, la limite de la suite u sera notée ℓ.
4. **Une application.**
   On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$$
   (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n, on a
   $$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   (b) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$.
   En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
   (c) En déduire que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
   (d) Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 (endomorphismes préservant le produit scalaire).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x|y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \qquad \varphi_u(x) = 2\frac{< x|u >}{< u|u >}u - x\,.$$

1. **Étude de l'application φ_u**
   (a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.
   (b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.
   (c) Soit $x \in E$. Simplifier au maximum le produit scalaire $< \varphi_u(x)|\varphi_u(x) >$.
   (d) Montrer que φ_u *conserve le produit scalaire*, c'est-à-dire que :
   $$\forall (x,y) \in E^2, \qquad < \varphi_u(x)|\varphi_u(y) > = < x|y >\ .$$
   (e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
   Déterminer l'image de D_u par φ_u.
   Montrer que H_u est stable par φ_u.
2. **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**
   Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.
   (a) Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.
   (b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.
   (c) Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.
   Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.