

# DEVOIR MAISON 15

*un corrigé*

## Exercice (calcul du déterminant de Cauchy).

1. Par hypothèse, il existe  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$  et  $a_i = a_j$ . On remarque alors que les lignes  $i$  et  $j$  du déterminant  $C_n$  sont égales. Comme le déterminant est une forme  $n$ -linéaire alternée, ce déterminant est nul. Ainsi :

si les nombres  $a_1, \dots, a_n$  ne sont pas deux à deux distincts, alors  $C_n = 0$

2. (a) Le degré de la fraction rationnelle  $F$  est égal à (par définition du degré d'une fraction rationnelle) :

$$\begin{aligned} \deg(F) &= \deg\left(\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - X)\right) - \deg\left(\prod_{i=1}^n (X + a_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \deg(b_i - X) - \sum_{i=1}^n \deg(X + a_i) \quad (\text{propriétés du degré dans } \mathbb{C}[X]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} 1 - \sum_{i=1}^n 1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\deg(F) = -1 < 0$  donc la partie entière de  $F$  est nulle. Comme les pôles de  $F$  sont les nombres complexes  $-a_1, \dots, -a_n$  et que tous ces pôles sont simples (les nombres  $a_1, \dots, a_n$  étant supposés deux à deux distincts), on déduit du théorème de décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  que :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad F = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X + a_i}$$

- (b) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En multipliant par  $X + a_i$  dans la décomposition en éléments simples de la question 2.(a), on a :

$$(X + a_i)F = (X + a_i) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X + a_k},$$

*i.e.* (en explicitant  $F$  et en isolant le sommand d'indice  $i$ ) :

$$\frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} (b_k - X)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (X + a_k)} = \lambda_i + (X + a_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\lambda_k}{X + a_k}$$

En évaluant en  $-a_i$ , on obtient :

$$\lambda_i = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (b_k + a_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_k - a_i)}$$

- (c) On commence par multiplier la ligne  $L_n$  de  $C_n$  par  $\lambda_n$  (remarquons que  $\lambda_n \neq 0$  d'après l'expression obtenue à la question précédente et l'hypothèse faite sur les nombres  $a_i$  et  $b_j$  en début d'exercice) :

$$C_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda_n}{a_n+b_1} & \frac{\lambda_n}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{\lambda_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

On effectue maintenant l'opération élémentaire  $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i L_i$  (ce qui ne change pas la valeur du déterminant) :

$$C_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i+b_1} & \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i+b_2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i+b_n} \end{vmatrix},$$

ce qui nous donne bien, par définition de  $F$ ,

$$C_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ F(b_1) & F(b_2) & \cdots & F(b_n) \end{vmatrix}$$

Or, par définition de  $F$ , les nombres  $b_1, \dots, b_{n-1}$  sont les racines de  $F$ , *i.e.* :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad F(b_i) = 0$$

Ainsi :

$$C_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & F(b_n) \end{vmatrix}$$

(d) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On développe le dernier déterminant obtenu (qui est de taille  $n \times n$ ) par rapport à sa dernière ligne. On obtient :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\lambda_n} \times \underbrace{(-1)^{n+n}}_{=1} \times F(b_n) \times \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix}}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_n)}{n-1} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)}{n} \times C_{n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n)}{n-1} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)}{n} \times C_{n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i)} \times C_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad C_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)(a_i - a_n)}{\left( \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i) \right) \left( \prod_{i=1}^n (a_i + b_n) \right)} \times C_{n-1}$$

(e) On raisonne par récurrence.

- ★ D'une part,  $C_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$  et d'autre part (sachant qu'un produit porté par l'ensemble vide vaut 1) :

$$\frac{\prod_{j \in \emptyset} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^1 \prod_{j=1}^1 (a_i + b_j)} = \frac{1}{a_1 + b_1} = C_1$$

L'égalité est donc vraie au rang  $n = 1$ .

- ★ Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On suppose que :

$$C_{n-1} = \frac{\prod_{j=2}^{n-1} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (a_i + b_j)}$$

D'après la question 2.(d), on a :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)(a_i - a_n)}{\left( \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i) \right) \left( \prod_{i=1}^n (a_i + b_n) \right)} \times C_{n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)(a_i - a_n)}{\left( \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i) \right) \left( \prod_{i=1}^n (a_i + b_n) \right)} \times \frac{\prod_{j=2}^{n-1} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (a_i + b_j)} \end{aligned}$$

Notons  $N$  le numérateur et  $D$  le dénominateur de cette fraction. On a :

$$\begin{aligned} D &= \left( \prod_{i=1}^n (a_i + b_n) \right) \underbrace{\left( \prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j) \right)}_{i=n} \times \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (a_i + b_j) \\ &= \underbrace{\left( \prod_{i=1}^n (a_i + b_n) \right)}_{j=n} \times \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} (a_i + b_j) \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j) \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$N = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

L'égalité est donc vraie au rang  $n$ .

Par principe de récurrence simple, on conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{\prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}$$