Devoir Maison 15

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad a_i + b_j \neq 0$$

L'objectif de cet exercice est de calculer le déterminant suivant :

$$C_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \qquad (\textit{déterminant de Cauchy})$$

1. On suppose que les nombres $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas deux à deux distincts. Déterminer la valeur de C_n en la justifiant.
2. On suppose désormais que les nombres $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts et on pose :

$$F = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - X)}{\prod_{i=1}^{n}(X + a_i)} \in \mathbb{C}(X)$$

   (a) Justifier qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X + a_i}$.

   (b) Démontrer que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \lambda_i = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k + a_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n}(a_k - a_i)}$$

   (c) Justifier successivement les égalités :

$$C_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ F(b_1) & F(b_2) & \cdots & F(b_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & F(b_n) \end{vmatrix}$$

(d) En déduire que, si n est supérieur ou égal à 2, alors :

$$C_n = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - b_n)(a_i - a_n)}{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)\right)\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_n)\right)} \times C_{n-1}$$

(e) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n = \frac{\displaystyle\prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)}$$