MPSI Mariette

Devoir Maison 14

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose $A = (X+1)^{2n} - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que :
$$\exists\, B \in \mathbb{R}[X], \qquad A = XB.$$
On précisera le degré de B, ainsi que ses coefficients dominant et constant. *On note b_0 le coefficient constant de B.*
2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$, et les autres racines $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}$ seront écrites sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer que :
$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$
En déduire que si $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. En calculant de deux manières le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$, en déduire les valeurs de Q_n puis de P_n.
5. On pose $F = \dfrac{1}{A} \in \mathbb{R}(X)$. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E différent de l'espace nul. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'application identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.
On rappelle que, par convention,
$$\forall f \in \mathscr{L}(E), \qquad f^0 = \mathrm{Id}_E.$$
On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation :
$$(f + \mathrm{Id}_E)^{2n} - \mathrm{Id}_E = \theta,$$
d'inconnue $f \in \mathscr{L}(E)$.

Définition On appelle *homothétie vectorielle de* E tout endomorphisme de E de la forme :

$$h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \right. \qquad (\text{où } \lambda \in \mathbb{C})$$

6. Déterminer les homothéties vectorielles solutions de l'équation.
7. Déterminer les valeurs des sommes :

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

8. Si s est un symétrie de E, exprimer $(s + \mathrm{Id}_E)^{2n} - \mathrm{Id}_E$ en fonction de s et de Id_E.
   En déduire les symétries de E qui sont solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note I la matrice identité et 0 la matrice nulle de cet espace vectoriel. On pose :

$$G = \left\{ M_{a,b} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \qquad \text{où} \qquad M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

9. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle :

$$(M + I)^{2n} - I = 0 \tag{$*$}$$

d'inconnue $M \in G$.
On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit $M = M_{a,b}$ un élément de E tel que $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M.

10. Déterminer une base (ε_1) de $E_1 = \mathrm{Ker}\big(u - (a+2b)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
11. Déterminer une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $E_1 = \mathrm{Ker}\big(u - (a-b)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
12. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E. *On la note* $\mathscr{C}$ *dans la suite.*
13. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{C}$.
14. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
    Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} en précisant la méthode adoptée et en détaillant les calculs.
15. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
16. Montrer que M est solution de $(*)$ si et seulement si D est solution de $(*)$.
17. Déterminer toutes les matrices D solutions de $(*)$.
18. Conclure quant à l'ensemble des solutions de $(*)$ dans G.