

# DEVOIR MAISON 14

un corrigé

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

## Partie I

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 = \binom{2n}{0} X^0 + \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k \\ &= X \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

en posant

$$B = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1} = \binom{2n}{2n} X^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{2} X^2 + \binom{2n}{1} \in \mathbb{R}[X],$$

on a bien  $A = XB$ ; de plus, comme  $\binom{2n}{2n} = 1 \neq 0$ , le degré de  $B$  vaut  $2n - 1$ , son coefficient dominant est égal à 1 et on a  $b_0 = 2n$

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a :

$$\begin{aligned} A(z) = 0 &\iff (z+1)^{2n} = 1 \iff z+1 \in \mathbb{U}_{2n} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, z+1 = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, z = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1 \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ , on a en posant  $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1$  (remarquons que  $z_0 = 0$ ) :

$$\begin{aligned} z_k &= e^{i\frac{k\pi}{2n}} \left( e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}} \right) = 2i e^{i\frac{k\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{(k+n)\pi}{2n}} \end{aligned}$$

car  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Ainsi :

les racines de  $A$  sont  $z_0 = 0$  et les nombres complexes  $z_1, \dots, z_{2n-1}$  définis (sous forme trigonométrique) :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket, \quad z_k = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{(k+n)\pi}{2n}}$$

3. On utilise le changement d'indice  $\ell = 2n - k$  et on obtient :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-\ell)\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

En utilisant la relation de Chasles pour les produits, on a :

$$Q_n = \left( \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right) \left( \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right) = P_n^2$$

d'après ce qui précède. On en déduit que  $Q_n \geq 0$  (le carré d'un nombre réel étant positif ou nul) puis que  $|P_n| = \sqrt{Q_n}$ . Or :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0 \quad (\text{car } 0 \leq \frac{k\pi}{2n} \leq \pi)$$

donc  $P_n \geq 0$ . Finalement,  $|P_n| = P_n$  et donc :

$$P_n = \sqrt{Q_n}$$

4. Le polynôme  $B$  est unitaire, de degré  $2n-1$  et ses racines complexes (deux à deux distinctes) sont  $z_1, \dots, z_{2n-1}$  donc on dispose de la factorisation de  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$  suivante :

$$B = \prod_{k=1}^{2n-1} (X - z_k)$$

★ On sait que le coefficient constant  $b_0$  de  $B$  vaut 1. On développant le produit ci-dessus, on a également :

$$b_0 = \prod_{k=1}^{2n-1} (-z_k) = (-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = - \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$$

Par conséquent :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -1 \tag{1}$$

★ Par ailleurs, par définition des nombres complexes  $z_1, \dots, z_{2n-1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{2n-1} \left[ 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i \frac{(k+n)\pi}{2n}} \right] \\ &= 2^{2n-1} \exp\left(\sum_{k=1}^{2n-1} i \frac{(k+n)\pi}{2n}\right) \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{2n-1} i \frac{(k+n)\pi}{2n} = \frac{1}{2n} \left( \frac{2n(2n-1)}{2} + n(2n-1) \right) i\pi = (2n-1)i\pi$$

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = 2^{2n-1} e^{(2n-1)i\pi} Q_n = -2^{2n-1} Q_n \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) fournissent les valeurs de  $Q_n$  et  $P_n$  :

$$Q_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

5. Le degré de la fraction rationnelle  $A$  est égal à  $-2n < 0$  donc la partie entière de  $F$  est nulle. Les pôles de  $F$  sont tous simples donc, d'après le théorème de décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ , il existe des nombres complexes  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}$  tels que :

$$F = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X - z_k}$$

On sait de plus que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, \quad \lambda_k &= \frac{1}{A'(z_k)} = \frac{1}{2n(z_k+1)^{2n-1}} \\ &= \frac{z_k+1}{2n(A(z_k)+1)} \\ &= \frac{z_k+1}{2n} \quad (\text{car } A(z_k) = 0) \end{aligned}$$

Ainsi, la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$F = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k+1}{X-z_k}$$

## Partie II

6. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On considère l'application :

$$h_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad h_\lambda = \lambda \text{Id}_E.$$

On résout :

$$\begin{aligned} (h_\lambda + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = \theta &\iff (\lambda + 1)^{2n} \text{Id}_E - \text{Id}_E = \theta \\ &\iff ((\lambda + 1)^{2n} - 1) \text{Id}_E = \theta \\ &\stackrel{(*)}{\iff} (\lambda + 1)^{2n} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Justifions l'équivalence (\*) en raisonnant par double implication.

★ Supposons que  $((\lambda + 1)^{2n} - 1) \text{Id}_E = \theta$ . Comme  $E$  est différent de l'espace nul, il existe un vecteur  $x$  de  $E$  différent du vecteur nul. En évaluant en  $x$  dans l'égalité précédente, on obtient :

$$((\lambda + 1)^{2n} - 1) \text{Id}_E(x) = \theta(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad ((\lambda + 1)^{2n} - 1)x = 0_E,$$

en notant  $0_E$  le vecteur nul de  $E$ . Or  $x \neq 0_E$  donc  $(\lambda + 1)^{2n} - 1 = 0$ .

★ L'implication réciproque est évidente.

Finalement :

les homothéties vectorielles  $h_\lambda$  solutions de l'équation sont celles pour lesquelles le rapport  $\lambda$  est racine du polynôme  $A$ , c'est-à-dire telles que

$$\lambda \in \{z_k \mid k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket\}.$$

7. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \quad (3)$$

et (puisque  $2n > 0$  pour la première égalité ci-dessous) :

$$0 = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \quad (4)$$

En sommant les égalités, on obtient :

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1 + (-1)^k)$$

Or :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il reste donc dans la dernière somme :

$$2^{2n} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} 2 \binom{2n}{k} = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} \quad \text{donc} \quad \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{2p} = 2^{2n-1}.$$

Comme :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k},$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1} &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \\ &= 2^{2n} - 2^{2n-1} \\ &= 2^{2n} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}}$$

8. Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie vectorielle de  $E$ . Comme  $s$  et  $\text{Id}_E$  commutent dans  $\mathcal{L}(E)$ , on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (s + \text{Id}_E)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} s^k \circ \text{Id}_E^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} s^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} s^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} s^{2k+1} \end{aligned}$$

Or  $s$  est une symétrie vectorielle donc  $s^2 = \text{Id}_E$ . On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad s^{2k} = (s^2)^k = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad s^{2k+1} = s^{2k} \circ s = s$$

Ainsi :

$$(s + \text{Id}_E)^{2n} = \left( \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \right) \text{Id}_E + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \right) s$$

La question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{(s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = (2^{2n-1} - 1) \text{Id}_E + 2^{2n-1} s}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = \theta &\iff (2^{2n-1} - 1) \text{Id}_E + 2^{2n-1} s = \theta \\ &\iff s = (2^{1-2n} - 1) \text{Id}_E \quad (\text{car } 2^{2n-1} \neq 0) \end{aligned}$$

L'application  $s = (2^{1-2n} - 1) \text{Id}_E$  n'est pas involutive car :

$$s^2 = (2^{1-2n} - 1)^2 \text{Id}_E \neq \text{Id}_E$$

puisque  $(2^{1-2n} - 1)^2 \neq 1$ . Ainsi :

il n'existe pas de symétrie vectorielle de  $E$  solution de l'équation proposée

### Partie III

9. Tout d'abord, il est clair que  $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . On a :

$$\begin{aligned} M \in G &\iff \exists a, b \in \mathbb{C}, M = M_{a,b} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{C}, M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M = aI + bJ, \end{aligned}$$

où  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Par conséquent :

$$G = \{aI + bJ \mid a, b \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(I, J)$$

Ainsi :

$G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ; une base de cet espace est la famille  $(I, J)$  (cette famille est génératrice de  $G$  car  $G = \text{Vect}(I, J)$  et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires) donc  $\dim(G) = 2$ .

10. Soit  $(x, y, z) \in E$ . Comme  $M$  est la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $E$ , on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_1 &\iff (u - (a + 2b)\text{Id}_E)((x, y, z)) = (0, 0, 0) \\ &\iff (M - (a + 2b)I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad (\text{car } b \neq 0) \\ &\iff (x, y, z) = (x, x, x), \end{aligned}$$

la résolution du système étant immédiate (en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss). On en déduit que :

$$E_1 = \{x(1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

Posons  $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ . La famille  $(\varepsilon_1)$  est génératrice de  $E_1$  d'après l'égalité précédente et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Par conséquent,  $(\varepsilon_1)$  est une base de  $E_1$ . Finalement :

une base de  $E_1$  est  $(\varepsilon_1)$  où  $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ .

11. Soit  $(x, y, z) \in E$ . On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_2 &\iff (M - (a - b)I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x + y + z = 0 \quad (\text{car } b \neq 0) \\ &\iff (x, y, z) = (-y - z, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_2 = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Posons  $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$  et  $\varepsilon_3 = (-1, 0, 1)$ . La dernière égalité obtenue prouve que la  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une famille génératrice de  $E_2$ . Cette famille est de plus libre puisqu'elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Par conséquent,  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $E_2$ . Finalement :

une base de  $E_2$  est  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  où  $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$  et  $\varepsilon_3 = (-1, 0, 1)$ .

12. La famille  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une famille de trois vecteurs de l'espace vectoriel  $E$  qui est de dimension 3. Pour montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $E$ , il suffit donc de montrer que  $\mathcal{C}$  est une famille libre. Pour tous  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = (0, 0, 0) &\iff (\alpha - \beta - \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \beta = -\alpha \\ \alpha + \alpha - \alpha = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

La famille  $\mathcal{C}$  est donc libre. Finalement :

la famille  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $E$

13. Par définition de  $\varepsilon_1$ , on a :

$$(u - (a + 2b)\text{Id}_E)(\varepsilon_1) = (0, 0, 0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u(\varepsilon_1) - (a + 2b)\varepsilon_1 = (0, 0, 0),$$

soit encore  $u(\varepsilon_1) = (a + 2b)\varepsilon_1$ . De la même manière, on a :

$$u(\varepsilon_2) = (a - b)\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad u(\varepsilon_3) = (a - b)\varepsilon_3.$$

Ainsi, la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$  est :

$$D = \begin{pmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{pmatrix}.$$

14. On sait que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est la base canonique de  $E$  donc :

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Ainsi :

$$\varepsilon_1 = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad \varepsilon_2 = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3.$$

Par conséquent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que  $P^{-1}$  est la matrice des coordonnées des vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  exprimés dans la base  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . On remarque que :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 3e_1 \quad \text{donc} \quad e_1 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Ensuite :

$$e_2 = e_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 \quad \text{et} \quad e_3 = e_1 + \varepsilon_3 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_3$$

Finalement :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

15. D'après les formules de changement de base, on a l'égalité :

$$M = PDP^{-1}.$$

16. On a :

$$(M + I)^{2n} - I = 0 \iff (PDP^{-1} + I)^{2n} = I.$$

En remarquant que  $I = PIP^{-1}$ , et en utilisant la bilinéarité du produit matriciel, on peut écrire que :

$$PDP^{-1} + I = P(D + I)P^{-1}$$

Une récurrence immédiate fournit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (P(D + I)P^{-1})^k = P(D + I)^k P^{-1}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (M + I)^{2n} - I = 0 &\iff P(D + I)^{2n} P^{-1} = I \iff P^{-1} P(D + I)^{2n} P^{-1} P = P^{-1} I P \\ &\iff (D + I)^{2n} = I \\ &\iff (D + I)^{2n} - I = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{M \text{ est solution de } (*) \text{ si et seulement si } D \text{ est solution de } (*)}$$

17. La matrice :

$$D + I = \begin{pmatrix} a + 2b + 1 & 0 & 0 \\ 0 & a - b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & a - b + 1 \end{pmatrix}$$

est diagonale donc :

$$(D + I)^{2n} = \begin{pmatrix} (a + 2b + 1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a - b + 1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a - b + 1)^{2n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (D + I)^{2n} - I = 0 &\iff \begin{pmatrix} (a + 2b + 1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a - b + 1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a - b + 1)^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff (a + 2b + 1)^{2n} = 1 \text{ et } (a - b + 1)^{2n} = 1 \\ &\iff \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \begin{cases} a + 2b + 1 = z_k \\ a - b + 1 = z_\ell \end{cases} \\ &\iff \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases} \\ &\iff \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, k \neq \ell \text{ et } \begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

car  $b$  est supposé différent de 0. Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{les matrices } D = \begin{pmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{pmatrix} \text{ solutions de } (*) \text{ (où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}^*) \\ \text{sont celles pour lesquelles :} \\ \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, k \neq \ell \text{ et } \begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases}. \end{aligned}}$$

18. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . D'après les questions 16. et 17., la matrice  $M = M_{a,b}$  est solutions de  $(*)$  si et seulement s'il existe  $k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$  tels que  $k \neq \ell$  et :

$$\begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases}. \quad (\diamond)$$

Si  $b = 0$ , alors  $M = Ma, 0 = aI$  et :

$$\begin{aligned}(M + I)^{2n} - I = 0 &\iff ((a + 1)^{2n} - 1)I = 0 \\ &\iff (a + 1)^{2n} = 1 \quad (\text{car } I \neq 0) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, a + 1 = z_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, a = z_k - 1.\end{aligned}$$

Les valeurs de  $a$  et  $b$  sont ici celles de  $(\diamond)$  pour  $\ell = k$ . Finalement :

<p>l'ensemble des solutions de <math>(*)</math> est</p> $\left\{ M \left( \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1, \frac{z_k - z_\ell}{3} \right) \mid k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket \right\}.$
---