Devoir Maison 13

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

On désigne par $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ (respectivement[1] $\mathscr{I}(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui sont paires (respectivement impaires) sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{I}(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{I}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ dont la base canonique est notée $(e_1, \ldots, e_n)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad e_k = (\delta_{k,\ell})_{1 \leqslant \ell \leqslant n}$$

On considère les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)$$

1. Donner la dimension de G en la justifiant.
2. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer une base de F et sa dimension.
   On exprimera les vecteurs de la base en fonction de $e_1, \ldots, e_n$.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 3.

On considère dans cet exercice le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et on définit l'application u par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad u(z) = iz - i\bar{z}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.
3. Calculer u^2.
4. Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} + 2u$ de $\mathbb{C}$ est un automorphisme et donner son application réciproque.

---

1. C'est la lettre « *i* » majuscule cursive.