

DEVOIR MAISON 13

un corrigé

Problème 1 (série harmonique alternée).

Première partie : étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On a :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

et :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

De plus¹ :

$$\frac{X^2}{X+1} = \frac{X(X+1) - (X+1) + 1}{X+1} = X - 1 + \frac{1}{X+1}$$

Ainsi :

$$I_2 = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Ainsi :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale car :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{x^n}{1+x} \geq 0$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; le théorème de la limite monotone nous permet donc de conclure que :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On sait que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $I_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. De plus $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence précédemment obtenue, on obtient $2\ell = 0$, c'est-à-dire $\ell = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

1. Il s'agit de décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(I_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ donc :

$$I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \quad \text{et} \quad I_{n-1} + I_n \geq 2I_n$$

En utilisant l'égalité obtenue à la question 2., ces deux inégalités se réécrivent :

$$\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{(n-1)+1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

Comme $\frac{1}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, on déduit du théorème des gendarmes pour les équivalents que :

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

Deuxième partie : étude de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$

5. (a) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a $A_1 = 1$ et (en utilisant la question 1.) :

$$\ln(2) + (-1)^2 I_1 = \ln(2) + (1 - \ln(2)) = 1 = A_1$$

L'égalité est donc vérifiée pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$. Montrons que :

$$A_{n+1} = \ln(2) + (-1)^{n+2} I_{n+1}$$

On a (en utilisant la relation de Chasles pour les sommes et l'hypothèse de récurrence) :

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{=A_n} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

D'après la question 3., on a $I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \ln(2) + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - I_{n+1} \right) - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1} \\ &= \ln(2) + (-1)^{n+2} I_{n+1} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n}$$

(b) La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $(-1)^{n+1} I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. La relation obtenue à la question précédente entraîne que :

$$\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } \ln(2)}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^n & v(x) &= \frac{1}{1+x} \\ u(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} & v'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ donc, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx}$$

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. Il est clair que $(1+x)^2 \geq 1$ donc (par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^*), on a $0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$. Comme $x^{n+1} \geq 0$, on obtient $0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$. Par (positivité et) croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \quad \text{où} \quad \int_0^1 x^{n+1} dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+2}}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilisant successivement les questions 5.(a) et 6., on a :

$$A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} J_n \right) = \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n$$

D'après la question 7., on a :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n \right| = \frac{1}{n+1} J_n \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pour conclure, il suffit d'établir que :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (*)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \right| = \left| \frac{2n - (2n+2)}{2n(2n+2)} \right| = \frac{1}{n(2n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

car $n(2n+2) = 2n^2 + 2n \geq n^2$. L'estimation (*) est donc démontrée. Finalement, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Problème 2 (d'après Concours Commun des Écoles des Mines 2009).

I – Étude de deux applications

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Tout d'abord, une composée de polynômes est un polynôme et une combinaison linéaire de polynômes est un polynôme donc $f(P) \in \mathbb{R}[X]$. De plus, on sait que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X], \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$$

En particulier, comme $\frac{X}{2}$ et $\frac{X+1}{2}$ sont de degré 1, on a :

$$\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) = \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \deg(P)$$

Ainsi (en utilisant encore les propriétés sur le degré) :

$$\begin{aligned} \deg(f(P)) &= \deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \leq \max\left[\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right] \\ &= \max(\deg(P), \deg(P)) \\ &= \deg(P) \\ &\leq 2 \quad (\text{puisque } P \in \mathbb{R}_2[X]) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{R}_2[X]}$$

Remarque : on peut aussi expliciter le polynôme (il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$) et calculer $f(P)$. On constate alors que P est de degré inférieur ou égal à 2 (on obtient effectivement une combinaison linéaire de $1 = X^0$, X et X^2), ce qui répond à la question.

Montrons maintenant que f est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= \frac{1}{2} \left[(P + \lambda Q) \left(\frac{X}{2} \right) + (P + \lambda Q) \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + \lambda Q \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) + \lambda Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \quad (\text{par définition de } P + \lambda Q) \\ &= \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] + \lambda \times \frac{1}{2} \left[Q \left(\frac{X}{2} \right) + Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est linéaire (on a donc } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]))}$$

2. Tout d'abord, φ est clairement à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) \quad (\text{par définition de } P + \lambda Q) \\ &= \varphi(P) + \lambda \varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire. Finalement :

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_2[X]}$$

3. On a $f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ puis :

$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{1}{2} \left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} \right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(X^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{2} \right)^2 + \left(\frac{X+1}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{X^2}{4} + \frac{X^2}{4} + \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}, \text{ notée } N, \text{ est } N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

4. La matrice N est inversible (en effet, celle-ci est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls) donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est injective et surjective}}$$

5. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff P(1) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c \\ &\iff P = -b - c + bX + cX^2 \\ &\iff P = b(X - 1) + c(X^2 - 1) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{b(X - 1) + c(X^2 - 1) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$$

La famille $(X - 1, X^2 - 1)$ est génératrice de $\text{Ker}(\varphi)$ et elle est libre car constituée de deux polynômes de degrés différents. Ainsi :

$$\boxed{\text{une base de } \text{Ker}(\varphi) \text{ est } (X - 1, X^2 - 1) \text{ et } \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2}$$

Remarque : la dimension obtenue est en fait immédiate car φ est une forme linéaire *non nulle* (par exemple car $\varphi(1) = 1 \neq 0$) ; son noyau est donc un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$.

6. D'après le théorème du rang (qui s'applique car $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie), on a :

$$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 3 - 2 = 1 = \dim(\mathbb{R})$$

Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Autrement dit, φ est surjective. Par ailleurs, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2 > 0$ donc φ n'est pas injective. Finalement :

$$\boxed{\varphi \text{ est surjective et n'est pas injective}}$$

II – Calcul des puissances successives d'une matrice

7. La famille \mathcal{B}' est composée de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés deux à deux distincts donc \mathcal{B}' est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme de plus $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on peut conclure que :

\mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

8. La matrice de passage Q de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Tout d'abord :

la matrice Q est inversible car elle est une matrice de passage

On sait que Q^{-1} est la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} . Or :

$$X = -\frac{1}{2}(-2X + 1) + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X^2 = \frac{1}{6}(6X^2 - 6X + 1) - \frac{1}{2}(-2X + 1) + \frac{1}{3}$$

donc :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut aussi répondre à cette question à la main. « Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}). \text{ Etc. } \gg$$

10. D'après les formules de changement de base, on a :

$$M = Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

i.e. :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

11. On démontre la relation à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

★ On a $A^0 = I_3$ et $QM^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = QM^nQ^{-1}$. D'après les formules de changement de base, on a $M = Q^{-1}AQ$ donc (en multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}) on a aussi $QM^0Q^{-1} = A$. Ainsi (en utilisant l'associativité du produit matriciel) :

$$A^{n+1} = A^n A = QM^nQ^{-1}QM^0Q^{-1} = QM^nI_3MQ^{-1} = QM^{n+1}Q^{-1}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QM^nQ^{-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la matrice M est diagonale, on a $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$. En développant le produit matriciel

QM^nQ^{-1} , il vient :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

12. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P = a + bX + cX^2$. Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice des coordonnées de $f^n(P)$ dans la base canonique est :

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}\right)c \\ \frac{b}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f^n(P) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right)X + \frac{c}{4^n}X^2$$

13. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$. D'après la question précédente, on a pour tout entier naturel n :

$$\varphi(f^n(P)) = f^n(P)(1) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n}$$

donc $\varphi(f^n(P)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$. Or :

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

donc on a bien :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$$

III – Une autre preuve du résultat précédent

14. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) = f(P)$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$. En utilisant la linéarité de f et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n} + k}{2}\right) + P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n} + k + 1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+\ell}{2^{n+1}}\right) + \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ impair}}}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+\ell}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+\ell}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

15. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par définition de φ et d'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=1}^{2^n} P\left(\frac{\ell}{2^n}\right)$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $u_m = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^m P\left(\frac{\ell}{m}\right)$. La suite $(u_m)_{m \geq 1}$ est une suite de sommes de Riemann de la

fonction $t \mapsto P(t)$ qui est continue sur $[0, 1]$ (car polynomiale). Cette suite converge donc de limite $\int_0^1 P(t) dt$.

Or $(\varphi^n(P))_{n \geq 1}$ est une suite extraite de $(u_m)_{m \geq 1}$, donc cette suite converge également vers $\int_0^1 P(t) dt$. Ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$$