Devoir Maison 13

Problème 1 (série harmonique alternée).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

L'objectif de ce problème est d'obtenir des informations sur la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$. Plus précisément, nous allons calculer la limite de cette suite puis nous en déterminerons un développement asymptotique à deux termes.

On introduit la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Première partie : étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer les intégrales I_0, I_1 et I_2.
2. (a) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

   Quelle est la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Deuxième partie : étude de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$

5. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$$

   (b) Conclure quant à la limite de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans la suite du problème, on veut préciser cette convergence en calculant un développement asymptotique de la suite.

6. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

7. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+2}$$

8. Conclure que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Problème 2 (d'après Concours Commun des Écoles des Mines 2009).

I – Étude de deux applications

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égaux à 2. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array} \right.$$

et :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array} \right.$$

On rappelle aussi que l'on pose $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et sa dimension.
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

II – Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathscr{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\mathscr{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$$

7. Justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Écrire la matrice de passage Q de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$.
11. Calculer A^n pour tout entier naturel n. *On explicitera les neufs coefficients de A^n.*
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
13. En déduire que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

III – Une autre preuve du résultat précédent

14. Démontrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$
15. Retrouver alors le fait que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$