Devoir Maison 12

un corrigé

Exercice 1.

1. (a) Soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $Y = (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(X + \lambda Y) &= f\big((x, y, z) + \lambda(a, b, c)\big) \\ &= f\big((x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c)\big) \\ &= \big(- (x + \lambda a) + (y + \lambda b) + (z + \lambda c), -(x + \lambda a) + (z + \lambda c), -(x + \lambda a) + (z + \lambda c)\big) \\ &= \big(- x + y + z + \lambda(-a + b + c), -x + z + \lambda(-a + c), -x + z + \lambda(-a + c)\big) \\ &= (-x + y + z, -x + z, -x + z) + \lambda(-a + b + c, -a + c, -a + c) \\ &= f(X) + \lambda f(Y) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Ainsi :

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)}$$

(b) ⋆ Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(X) = 0_{\mathbb{C}^3} &\iff (-x + y + z, -x + z, -x + z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = (z, 0, z) = z(1, 0, 1) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1)\big)}$$

La famille $\mathscr{B} = \big((1, 0, 1)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Ainsi :

$$\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(f) \text{ est } \mathscr{B} = \big((1, 0, 1)\big) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1}$$

⋆ Une famille génératrice de $\mathbb{C}^3$ est $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\big) = \mathrm{Vect}\big((-1, -1, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\big)$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0), (1, 1, 1)\big)}$$

car $(-1, -1, -1) = -(1, 1, 1)$. La famille $\mathscr{C} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 1)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et elle est libre car :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \qquad \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 1) = 0_{\mathbb{C}^3} \iff \alpha = \beta = 0,$$

la résolution du système étant effectivement immédiate. Ainsi :

$$\boxed{\text{une base de } \mathrm{Im}(f) \text{ est } \mathscr{C} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 1)\big) \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2}$$

(c) On a $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{C}^3}\}$ donc f n'est pas injective. De plus $\dim(\mathrm{Im}(f)) < \dim(\mathbb{C}^3)$ donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{C}^3$, ce qui signifie que f n'est pas surjective. Finalement :

$$\boxed{f \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective}}$$

2. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

★ On a :

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z) &= f(f(x,y,z)) \\ &= f(-x+y+z, -x+z, -x+z) \\ &= \big(-(-x+y+z)-x+z-x+z, -(-x+y+z)-x+z, -(-x+y+z)-x+z\big) \\ &= (-x-y+z, -y, -y) \end{aligned}$$

★ Ensuite :

$$\begin{aligned} f^3(x,y,z) &= f(f^2(x,y,z)) \\ &= f(-x-y+z, -y, -y) \\ &= \big(-(-x-y+z)-y-y, -(-x-y+z)-y, -(-x-y+z)-y\big) \\ &= (x-y-z, x-z, x-z) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{f^2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x-y+z, -y, -y) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f^3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y-z, x-z, x-z) \end{array} \right.}$$

(b) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, on a :

$$f^3(x,y,z) = (x-y-z, x-z, x-z) = -(-x+y+z, -x+z, -x+z) = -f(x,y,z)$$

donc :

$$\boxed{f^3 = -f}$$

On en déduit que :

$$\boxed{f^4 = f^3 \circ f = -f \circ f = -f^2 \qquad \text{et} \qquad f^5 = f^3 \circ f^2 = -f \circ f^2 = -f^3 = f}$$

3. (a) D'après les calculs précédents, on a $G = \{f, f^2, -f, -f^2\}$. La table de la loi $\circ$ dans l'ensemble G est définie comme suit :

$\circ$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f^2}$	$\boldsymbol{-f}$	$\boldsymbol{-f^2}$
$\boldsymbol{f}$	f^2	$-f$	$-f^2$	f
$\boldsymbol{f^2}$	$-f$	$-f^2$	f	f^2
$\boldsymbol{-f}$	$-f^2$	f	f^2	$-f$
$\boldsymbol{-f^2}$	f	f^2	$-f$	$-f^2$

(b) Tout d'abord, G est un ensemble non vide.

- ★ L'opération $\circ$ est une loi de composition interne sur G d'après la table précédemment obtenue.
- ★ D'après cette même table, $-f^2$ est élément neutre pour la composition dans G.
- ★ De plus, on sait que la composition des applications est une opération associative.
- ★ D'après la table précédente, la loi $\circ$ est commutative.
- ★ Enfin, tout élément de G est inversible pour la loi $\circ$. En effet, $-f^2$ a pour inverse f^2 (et réciproquement) et f a pour inverse $-f$ (et réciproquement).

Finalement :

$$\boxed{(G, \circ) \text{ est un groupe abélien}}$$

(c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$. Alors $v(x) = 0_E$ puis :

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$$

par linéarité de u. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)}$$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u \circ v)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = (u \circ v)(y) = u(v(y))$. Comme $v(y) \in E$, on a $x \in \mathrm{Im}(u)$ par définition de l'image de u. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)}$$

(d) On a :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f^3) \subset \mathrm{Ker}(f^4) \subset \mathrm{Ker}(f^5) = \mathrm{Ker}(f)$$

car $f^5 = f$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f^3) = \mathrm{Ker}(f^4)}$$

De même :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^5) \subset \mathrm{Im}(f^4) \subset \mathrm{Im}(f^3) \subset \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Im}(f^4)}$$

Exercice 2.

1. Montrons que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
   - ⋆ La famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre car elle est échelonnée en degrés.
   - ⋆ Il reste à montrer que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}[X]$. Le polynôme nul $0_{\mathbb{R}[X]}$ est clairement combinaison linéaire des polynômes de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $0_{\mathbb{R}[X]} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot P_n$. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et notons $d \in \mathbb{N}$ le degré de P. On a $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et la famille $(P_0, \ldots, P_d)$ de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$ est libre (car échelonnée en degrés) et de cardinal $d + 1 = \dim(\mathbb{R}_d[X])$. Par conséquent, $(P_0, \ldots, P_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ et est donc en particulier une famille génératrice de cet espace. Il s'ensuit que $P \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_d)$. À fortiori, $P \in \mathrm{Vect}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

   On peut donc conclure que :

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X]}$$

2. Une différence de polynômes est un polynôme et la composition de deux polynômes est un polynôme donc $\Delta(\mathbb{R}[X]) \subset \mathbb{R}[X]$. La linéarité de Δ est claire. Ainsi :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$$

   Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X]$. Posons $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. Il existe $(c_0, \ldots, c_d) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^*$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k X^k$.

   D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} c_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{d} c_k X^k &= \sum_{k=0}^{d} c_k \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} X^\ell - \sum_{k=0}^{d} c_k X^k \\
&= \sum_{\ell=0}^{d} \left(\sum_{k=\ell}^{d} c_k \binom{k}{\ell} \right) X^\ell - \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell X^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{d} \underbrace{\left(\sum_{k=\ell+1}^{d} c_k \binom{k}{\ell} \right)}_{=0 \text{ si } \ell=d} X^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{d-1} \left(\sum_{k=\ell+1}^{d} c_k \binom{k}{\ell} \right) X^\ell
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\deg(\Delta(P)) \leqslant d - 1$. De plus :

$$\sum_{k=(d-1)+1}^{d} c_k \binom{k}{\ell} = c_d \binom{d}{d} = c_d \neq 0$$

   donc $\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X], \qquad \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1}$$

3. On remarque que tout polynôme constant appartient au noyau de Δ donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker}(\Delta)$. Réciproquement, soit $P \in \text{Ker}(\Delta)$. Par l'absurde, supposons que P ne soit pas un polynôme constant. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On a $\Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $P(X+1) = P(X)$. Ainsi, $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$. Une récurrence immédiate fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(\alpha + n) = 0$$

Il s'ensuit que P admet une infinité de racines et donc P est le polynôme nul, ce qui est absurde. On en déduit que $\text{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Finalement :

$$\boxed{\text{le noyau de } \Delta \text{ est } \text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

Comme $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\text{Im}(\Delta) = \text{Vect}(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}} = \text{Vect}(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$$

car $X^0 = 1 \in \text{Ker}(\Delta)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\Delta(X^n)$ est de degré $n-1$ d'après la question précédente. La question 1. entraîne donc que la famille $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'image de } \Delta \text{ est } \text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]}$$

4. On utilise un raisonnement par récurrence.
   - ⋆ Le polynôme Q_0 étant imposé, il est uniquement déterminé.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que les polynômes $Q_0, \dots, Q_{n-1}$, vérifiant les hypothèses demandées, existent et soient uniquement déterminés. Comme Δ est surjective (d'après la question précédente), il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(T_n) = Q_{n-1}$. Posons alors $Q_n = T_n - T_n(0)$ de sorte que $Q_n(0) = 0$. Par linéarité de Δ, on a :
   $$\Delta(Q_n) = \Delta(T_n) - \Delta(T_n(0)) = Q_n$$
   car le polynôme constant $T_n(0)$ appartient au noyau de Δ. Il s'agit maintenant de démontrer l'unicité. Si $R_n \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme tel que $\Delta(R_n) = Q_{n-1}$ et $R_n(0) = 0$, alors (par linéarité de Δ) on a $\Delta(Q_n - R_n) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Le noyau ayant été obtenu à la question 3., on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = R_n + \alpha$. En évaluant en 0, on obtient $\alpha = 0$ puis $Q_n = R_n$. Ceci démontre l'unicité et la propriété au rang n.

   Par principe de récurrence simple, on conclut que :

$$\boxed{\text{il existe une unique famille de polynômes vérifiant les propriétés annoncées}}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg(Q_n) = n$.
   - ⋆ La propriété est vraie pour $n = 0$ car $Q_0 = 1$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\deg(Q_n) = n$. On a $Q_n = \Delta(Q_{n+1})$. Le polynôme Q_n n'est pas nul (car de degré $n \in \mathbb{N}$) donc Q_{n+1} n'est pas un polynôme constant (*i.e.* $Q_{n+1} \notin \text{Ker}(\Delta)$). D'après la question 2., on a $\deg(Q_n) = \deg(Q_{n+1}) - 1$ donc $\deg(Q_{n+1}) = n+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg(Q_n) = n$. La question 1. permet alors de conclure que :

$$\boxed{\text{la famille } (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X]}$$

   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On sait que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^{n} \lambda_\ell Q_\ell$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'application Δ^k est linéaire donc :

$$\Delta^k(P) = \sum_{\ell=0}^{n} \lambda_\ell \Delta^k(Q_\ell)$$

   Si $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, alors $\Delta^k(Q_\ell) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (en effet, $\Delta^\ell(Q_\ell)$ est un polynôme constant, et donc appartient au noyau de Δ, d'après la question 2. et car Q_ℓ est de degré ℓ). Il reste :

$$\Delta^k(P) = \sum_{\ell=k}^{n} \lambda_\ell \Delta^k(Q_\ell) = \sum_{\ell=k}^{n} \lambda_\ell Q_{\ell-k}$$

   On évalue en 0 :

$$\Delta^k(P)(0) = \lambda_k Q_0(0) + \sum_{\ell=k+1}^{n} \lambda_\ell Q_{\ell-k}(0)$$

On sait que $Q_0 = 1$ donc $Q_0(0) = 1$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on sait que $Q_j(0) = 0$ donc si $\ell \in [\![k+1, n]\!]$, on a $Q_{\ell-k}(0) = 0$. On obtient donc l'égalité $\lambda_k = \Delta^k(P)(0)$. Finalement :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) Q_k}$$

6. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'endomorphisme T de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad T(P) = P(X+1)$$

Une récurrence immédiate fournit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad T^k(P) = P(X+k)$$

Les endomorphismes T et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ de $\mathbb{R}[X]$ commutent et $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ donc, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]})^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T^k$$

En évaluant en P, on obtient bien l'égalité :

$$\boxed{\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)}$$

Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question 2., $\Delta^n(P)$ est le polynôme nul. En évaluant en 0 dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$ (et $R_0 = 1$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme R_n s'annule en 0. De plus :

$$\begin{aligned}
\Delta(R_n) = R_n(X+1) - R_n(X) &= \frac{(X+1)X\cdots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \\
&= \frac{X(X-1)(X-n+2)(X-X+n-1)}{n!} \\
&= \frac{(n-1)X(X-1)\cdots(X-(n-1)+1)}{n!} \\
&= R_{n-1}
\end{aligned}$$

La famille $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc les propriétés évoquées à la question 4. Or il y a unicité d'une telle famille donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad Q_n = R_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}}$$

8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrons que les assertions (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes.
   - ⋆ La condition (i) entraîne clairement (ii).
   - ⋆ Supposons que (ii) soit satisfaite. On sait que $P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) Q_k$ donc la famille des coordonnées de P dans la base $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est :

     $$(\Delta^0(P)(0), \cdots, \Delta^n(P)(0), 0, 0, \cdots)$$

     Or, d'après la question 6., on a :

     $$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \Delta^k(P)(0) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) \in \mathbb{Z}$$

     d'après l'hypothèse (ii) et car un coefficient binomial est un entier. L'assertion (iii) est donc vraie.

- ⋆ On suppose que (iii) est satisfaite. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, on a $Q_k(\ell) = 0$. Si $\ell \in [\![k, +\infty[\![$, alors on a $Q_k(\ell) = \binom{\ell}{k} \in \mathbb{N}$. Enfin, si $\ell < 0$, alors on vérifie que $Q_k(\ell) = (-1)^k \binom{k-1-\ell}{k}$. La condition (iii) entraîne alors que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, ce qui démontre l'assertion (i).

  À ce stade, les assertions (i), (ii) et (iii) sont donc équivalentes.
- ⋆ L'assertion (i) entraîne clairement (iv).
- ⋆ Supposons que (iv) soit vérifiée. Il existe alors $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $P([\![\ell, \ell + n]\!]) \subset \mathbb{Z}$. Le polynôme :

  $$Q = P(X + \ell)$$

  vérifie donc (ii) et à fortiori (i). Comme $\mathbb{Z}$ est stable par translation, on peut conclure que P vérifie la propriété (i).

Finalement :

$$\boxed{\text{les assertions (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes}}$$