Devoir Maison 12

un corrigé

Exercice 1.

1. On sait que :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathrm{o}(u^3)$$

Comme $\tan(0) = 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)}$$

2. On a $g = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.
   - ⋆ On sait que [1] :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)} \qquad \text{et que} \qquad \frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

   Comme $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \mathrm{o}(x^4) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4) \end{aligned}$$

   - ⋆ De plus $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$ donc :

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)\left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \mathrm{o}(x^4) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^4)$$

   Ainsi :

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^4)}$$

3. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ donc :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{donc} \qquad h(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)}$$

On sait que $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$ et on a $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc (par composition) :

$$\begin{aligned} h(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \mathrm{o}(x^2)\right] \\ &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{4}\right) \end{aligned}$$

---

1. Il suffit en effet de développer $\dfrac{1}{1+u}$ à l'ordre 2.

Finalement :

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\,\mathrm{e}}{24}x^2 + \mathrm{o}(x^2)}$$

4. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$ et (en utilisant le fait que $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-x) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}(-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}(-x)^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}i(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3\right) + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \mathrm{o}(x^3),\end{aligned}$$

i.e. :

$$\boxed{i(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathrm{o}(x^3)}$$

Exercice 2.

1. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre u_n est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
   - ⋆ Le nombre u_1 vaut $1 > 0$ par hypothèse ; en particulier, u_1 est donc bien défini.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que u_n existe et appartient à $\mathbb{R}_+^*$. Alors $n + u_n \geqslant n + 1 \geqslant 2$. En particulier, $n + u_n \in \mathscr{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$ donc le nombre $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$ est bien défini. De plus, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

     $$\ln(n + u_n) \geqslant \ln(2) > 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad u_{n+1} > 0$$

     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

   $$\boxed{\text{la suite } u \text{ est bien définie et est à valeurs strictement positives}}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a d'après la question précédente (et par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$) :

   $$u_n = \ln(n - 1 + u_{n-1}) \geqslant \ln(n - 1)$$

   Or $\ln(n-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, on a :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

2. (a) On procède à nouveau par récurrence.
   - ⋆ On a $u_1 = 1$ donc $u_2 = \ln(1 + u_1) = \ln(2) \leqslant \ln(2 \times 1)$ donc l'inégalité est vérifiée pour $n = 2$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que $u_n \leqslant \ln(2n)$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant \ln(2n + 2)$. On a (en utilisant l'hypothèse de récurrence et la croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$) :

     $$\begin{aligned}u_{n+1} &= \ln(n + u_n) \\ &\leqslant \ln(n + \ln(2n)) \\ &= \ln(n + \ln(2) + \ln(n)) \\ &\leqslant \ln(2n + \ln(2)) \qquad \text{(en utilisant l'inégalité rappelée dans l'énoncé pour } x = n \in]-1, +\infty[) \\ &\leqslant \ln(2n + 2)\end{aligned}$$

     car $\ln(2) \leqslant 1 \leqslant 2$. L'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad u_n \leqslant \ln(2n)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$. D'après les questions 1.(a) et 2.(a), on a $n-1 \leqslant n-1+u_{n-1} \leqslant n-1+\ln(2n-2)$. Par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\ln(n-1) \leqslant u_n \leqslant \ln(n-1+\ln(2n-2))$$

i.e. :

$$\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\ln(2n-2)}{n}\right)$$

Or $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1)=0$ et $\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\ln(2n-2)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}= 0$ car, par croissances comparées,

$$\frac{\ln(2n-2)}{n} = \frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln\left(2-\frac{2}{n}\right)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En en déduit que :

$$\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \qquad \text{et} \qquad \ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\ln(2n-2)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

D'après le théorème des gendarmes pour les équivalents, on peut conclure que :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a :

$$u_n-\ln(n) = \ln(n-1+u_{n-1})-\ln(n) = \ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{u_{n-1}}{n}\right)$$

Or $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n-1)$ d'après la question précédente donc :

$$\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n-1)}{n} = \frac{\ln(n-1)}{n-1}\times\frac{n-1}{n} = \frac{\ln(n-1)}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Par croissances comparées, on en déduit que $\frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $-\frac{1}{n}+\frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On sait de plus que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc, par substitution, il vient :

$$u_n-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}+\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

car :

$$\frac{-\frac{1}{n}+\frac{u_{n-1}}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = -\frac{1}{\ln(n)}+\frac{u_{n-1}}{\ln(n)} = -\frac{1}{\ln(n)}+\frac{u_{n-1}}{\ln(n-1)}\times\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

En effet, on sait que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n-1)$ et on a :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Finalement :

$$\boxed{u_n-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}$$

Exercice 3.

1. La fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, f est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi}{2}+\operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_{n^2}^{n^3} = \mathrm{Arctan}(n^3) - \mathrm{Arctan}(n^2)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

d'après la question 1. car $\dfrac{1}{n^2} > 0$ et $\dfrac{1}{n^3} > 0$ et donc :

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Or $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$ et $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc :

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$$