

# DEVOIR MAISON 12

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

## Exercice 1.

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto \end{cases} \begin{matrix} \mathbb{C}^3 \\ (-x + y + z, -x + z, -x + z) \end{matrix}$$

1. (a) Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ .  
 (b) Déterminer le noyau et l'image de  $f$  et en donner des bases et les dimensions en le justifiant.  
 (c) L'application  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?
2. (a) Déterminer les applications  $f^2$  et  $f^3$ .  
 (b) Vérifier que  $f^3 = -f$ . En déduire  $f^4$  et  $f^5$ .
3. On pose  $G = \{f, f^2, f^3, f^4\}$ .  
 (a) Sous la forme d'un tableau, écrire la table de  $G$  pour la loi de composition.  
 (b) En déduire que  $(G, \circ)$  est un groupe abélien.  
 (c) Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que :

$$\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u \circ v) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u \circ v) \subset \text{Im}(u)$$

- (d) En déduire que tous les éléments de  $G$  ont le même noyau et la même image.

## Exercice 2 (facultatif).

1. Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_n) = n$$

Montrer que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ .

Soit  $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

2. Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  et que, pour tout polynôme  $P$  non constant, on a  $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ .
3. Déterminer  $\text{Ker}(\Delta)$  et  $\text{Im}(\Delta)$ .
4. Montrer qu'il existe une unique famille  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$  telle que  $Q_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(Q_n) = Q_{n-1} \quad \text{et} \quad Q_n(0) = 0$$

5. Justifier que  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$  et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n \Delta^k(P)(0) Q_k$$

6. Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et si  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , déterminer la valeur de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k P(k)$ .

7. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q_n = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}$$

8. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ ;
- (ii)  $P(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{Z}$ ;
- (iii) les coordonnées de  $P$  dans la base  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont des entiers ;
- (iv)  $P$  prend des valeurs entières sur  $n+1$  entiers consécutifs.