Devoir Maison 12

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (pour le lundi 13 mars).

Calculer les $\mathrm{DL}_n(0)$ des expressions suivantes pour la valeur de n indiquée :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\tan(x)}$ pour $n = 3$;
2. $g(x) = \mathrm{th}(x)$ pour $n = 4$;
3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $n = 2$;
4. $i(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}$ pour $n = 3$.

Exercice 2.

On rappelle que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

On considère la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \ln(n + u_n)$$

1. (a) Montrer que la suite u est bien définie et est à valeurs strictement positives.
   (b) En déduire que u possède une limite et la déterminer.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad u_n \leqslant \ln(2n)$$
   (b) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. Montrer que $u_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 3.

1. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$
2. En déduire que :
   $$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$