

# DEVOIR MAISON 11

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

## Exercice 1.

Calculer les  $DL_n(0)$  des expressions suivantes pour la valeur de  $n$  indiquée :

1.  $f(x) = e^{\tan(x)}$  pour  $n = 3$  ;
2.  $g(x) = \operatorname{th}(x)$  pour  $n = 4$  ;
3.  $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  pour  $n = 2$  ;
4.  $i(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}$  pour  $n = 3$ .

## Exercice 2.

On rappelle que :

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

On considère la suite  $u = (u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1$  et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \ln(n + u_n)$$

1. (a) Montrer que la suite  $u$  est bien définie et est à valeurs strictement positives.  
(b) En déduire que  $u$  possède une limite et la déterminer.
2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n \leq \ln(2n)$$

(b) En déduire que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

3. Montrer que  $u_n - \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ .

## Exercice 3.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. En déduire que :

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$