Devoir Maison 11

un corrigé

Exercice 1.

1. On commence par effectuer la division euclidienne de X^3 par :

$$(X-1)(X-2)(X-3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

On obtient :

$$X^3 = (X-1)(X-2)(X-3) + 6X^2 - 11X + 6$$

Ainsi, la partie entière[1] de F vaut 1 et :

$$F = \frac{(X-1)(X-2)(X-3) + 6X^2 - 11X + 6}{(X-1)(X-2)(X-3)} = 1 + \underbrace{\frac{6X^2 - 11X + 6}{(X-1)(X-2)(X-3)}}_{\text{notée } G}$$

On sait ensuite qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$G = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

- ⋆ En multipliant par $X-1$, on obtient :

$$\frac{6X^2 - 11X + 6}{(X-2)(X-3)} = a + b\frac{X-1}{X-2} + c\frac{X-1}{X-3}$$

En évaluant en 1, on obtient $a = \dfrac{1}{2}$.

- ⋆ En multipliant par $X-2$, on a :

$$\frac{6X^2 - 11X + 6}{(X-1)(X-3)} = a\frac{X-2}{X-1} + b + c\frac{X-2}{X-3}$$

On évalue ensuite en 2 et on obtient $b = -8$

- ⋆ En multipliant enfin par $X-3$ et en évaluant en 3, on trouve enfin $c = \dfrac{27}{2}$.

Donc :

$$\boxed{F = 1 + \frac{1}{2(X-1)} - \frac{8}{X-2} + \frac{27}{2(X-3)}}$$

2. Une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ est :

$$\boxed{\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \dfrac{\ln(|x-1|)}{2} - 8\ln(|x-2|) + \dfrac{27}{2}\ln(|x-3|) \end{array} \right.}$$

Exercice 2.

1. On a $P(0) = 9$ donc :

$$P - P(0) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9)$$

La factorisation de $P - P(0)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$\boxed{P - P(0) = X^2(X-3)^2}$$

1. La partie entière de $F = \dfrac{A}{B}$, où $(A,B) \in \mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\})$ est le quotient dans la division euclidienne de A par B.

2. On a :

$$P = (X(X-3))^2 + 9 = (X(X-3))^2 + (3i)^2 = (X(X-3)-3i)(X(X-3)+3i)$$
$$= (X^2-3X-3i)(X^2-3X+3i)$$

Le discriminant du polynôme du second degré $P_1 = X^2 - 3X - 3i$ vaut $9+12i = \left(\sqrt{3}(2+i)\right)^2$. Les racines de P_1 sont donc :

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De même, les racines de $P_2 = X^2 - 3X + 3i$ sont :

$$\beta_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Donc la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ est :

$$\boxed{P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\beta_1)(X-\beta_2)}$$

et, en remarquant que $\beta_1 = \overline{\alpha_1}$ et $\beta_2 = \overline{\alpha_2}$, on a (en développant $(X-\alpha_i)(X-\beta_i)$) :

$$\boxed{P = (X^2 - (2\sqrt{3}+3)X + 3\sqrt{3}+6)(X^2 + (2\sqrt{3}-3)X - 3\sqrt{3}+6)}$$

Exercice 3.

1. En remplaçant n par 0 puis par 1, on a :

$$\boxed{P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2} \qquad \text{puis} \qquad \boxed{P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2-2) - X = X^3 - 3X}$$

2. Tout d'abord :

$$\boxed{\text{le degré de } P_0 \text{ est nul, son coefficient dominant vaut 2}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons c_n le coefficient dominant de P_n. Montrons par récurrence (double) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \deg(P_n) = n \text{ et } c_n = 1$$

- ⋆ On a $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 2$ donc $\deg(P_1) = 1$, $\deg(P_2) = 2$ et $c_1 = c_2 = 1$. Les propriétés sont donc vraies aux rangs $n \in \{1, 2\}$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\deg(P_n) = n$, $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et $c_n = c_{n+1} = 1$. On a (d'après les propriétés sur le degré) :

  $$\deg(XP_{n+1}) = \deg(X) + \deg(P_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2 \qquad \text{tandis que} \qquad \deg(-P_n) = \deg(P_n) = n$$

  En particulier, $\deg(XP_{n+1}) \neq \deg(-P_n)$ donc :

  $$\deg(P_{n+2}) = \deg(XP_{n+1} + (-P_n)) = \max(\deg(XP_{n+1}), \deg(-P_n)) = \max(n+2, n) = n+2$$

  De plus, le coefficient dominant c_{n+2} de P_{n+2} est celui de XP_{n+1}. Or le coefficient dominant de P_{n+1} vaut $c_{n+1} = 1$ donc celui de XP_{n+1} vaut (d'après les considérations sur le degré précédentes) $c_{n+2} = 1$. La propriété est donc vraie au rang $n+2$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \deg(P_n) = n \text{ et } c_n = 1}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On utilise à nouveau une récurrence double.
   - ⋆ Comme $P_0 = 2$ (polynôme constant), on a $P_0\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2$ et :

     $$z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2 = P_0\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

     De plus, $P_1 = X$ donc :

     $$P_1\left(z + \frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$$

     Les égalités sont donc vraies aux rangs $n \in \{0, 1\}$.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} \qquad \text{et} \qquad P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$$

En utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a :

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+2$.

Par principe de récurrence, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après les formules d'Euler, on a :

$$2\cos(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$$

En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente au point $z = \mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, il vient :

$$P_n(2\cos(\theta)) = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n + \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n} = \mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}$$

d'après la formule de Moivre. En utilisant à nouveau la formule d'Euler pour le cosinus, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$2\cos(n\theta) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $\theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad P_n(2\cos(\theta_k)) = 2\cos(n\theta_k) = 0$$

De plus :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2n} < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$$

Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a :

$$2\cos(\theta_{n-1}) < \cdots < 2\cos(\theta_1) < 2\cos(\theta_0)$$

On a donc trouvé n racines distinctes du polynôme P_n. Or P_n est de degré n donc P_n n'admet pas d'autre racine. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des racines de } P_n \text{ est } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

et comme le coefficient dominant de P_n est égal à 1, la factorisation cherchée de P_n est :

$$\boxed{P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$