

DEVOIR MAISON 11

un corrigé

Exercice 1.

1. On sait que :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

Comme $\tan(0) = 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

2. On a $g = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$.

★ On sait que¹ :

$$\frac{1}{\text{ch}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{1 + u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Comme $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{ch}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}$$

★ De plus $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ donc :

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)}$$

3. On a $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \quad \text{donc} \quad h(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

1. Il suffit en effet de développer $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 2.

On sait que $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et on a $-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc (par composition) :

$$\begin{aligned} h(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right)^2 + o(x^2) \right] \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$$

4. On a $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et (en utilisant le fait que $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \times (-x) + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right)}{2} (-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} - 2 \right)}{6} (-x)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} i(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 \right) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3), \end{aligned}$$

i.e. :

$$i(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Exercice 2.

1. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre u_n est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

★ Le nombre u_1 vaut $1 > 0$ par hypothèse ; en particulier, u_1 est donc bien défini.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que u_n existe et appartient à $\mathbb{R}_+^*$. Alors $n + u_n \geq n + 1 \geq 2$. En particulier, $n + u_n \in \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$ donc le nombre $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$ est bien défini. De plus, par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(n + u_n) \geq \ln(2) > 0 \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} > 0$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

la suite u est bien définie et est à valeurs strictement positives

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a d'après la question précédente (et par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$u_n = \ln(n - 1 + u_{n-1}) \geq \ln(n - 1)$$

Or $\ln(n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. (a) On procède à nouveau par récurrence.

★ On a $u_1 = 1$ donc $u_2 = \ln(1 + u_1) = \ln(2) \leq \ln(2 \times 1)$ donc l'inégalité est vérifiée pour $n = 2$.

★ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que $u_n \leq \ln(2n)$. Montrons que $u_{n+1} \leq \ln(2n + 2)$. On a (en utilisant l'hypothèse de récurrence et la croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \ln(n + u_n) \\ &\leq \ln(n + \ln(2n)) \\ &= \ln(n + \ln(2) + \ln(n)) \\ &\leq \ln(2n + \ln(2)) \quad (\text{en utilisant l'inégalité rappelée dans l'énoncé pour } x = n \in]-1, +\infty[) \\ &\leq \ln(2n + 2) \end{aligned}$$

car $\ln(2) \leq 1 \leq 2$. L'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n \leq \ln(2n)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. D'après les questions 1.(a) et 2.(a), on a $n - 1 \leq n - 1 + u_{n-1} \leq n - 1 + \ln(2n - 2)$. Par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\ln(n - 1) \leq u_n \leq \ln(n - 1 + \ln(2n - 2))$$

i.e. :

$$\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(2n - 2)}{n}\right)$$

Or $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(2n - 2)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car, par croissances comparées,

$$\frac{\ln(2n - 2)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(2 - \frac{2}{n}\right)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En en déduit que :

$$\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(2n - 2)}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

D'après le théorème des gendarmes pour les équivalents, on peut conclure que :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$u_n - \ln(n) = \ln(n - 1 + u_{n-1}) - \ln(n) = \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n}\right)$$

Or $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n - 1)$ d'après la question précédente donc :

$$\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n - 1)}{n} = \frac{\ln(n - 1)}{n - 1} \times \frac{n - 1}{n} = \frac{\ln(n - 1)}{n - 1} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Par croissances comparées, on en déduit que $\frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, $-\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On sait de plus que $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donc, par substitution, il vient :

$$u_n - \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

car :

$$\frac{-\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = -\frac{1}{\ln(n)} + \frac{u_{n-1}}{\ln(n)} = -\frac{1}{\ln(n)} + \frac{u_{n-1}}{\ln(n - 1)} \times \frac{\ln(n - 1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

En effet, on sait que $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n-1)$ et on a :

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Finalement :

$$\boxed{u_n - \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}$$

Exercice 3.

1. La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, f est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2} dt &= \left[\operatorname{Arctan}(t) \right]_{n^2}^{n^3} = \operatorname{Arctan}(n^3) - \operatorname{Arctan}(n^2) \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

d'après la question 1. car $\frac{1}{n^2} > 0$ et $\frac{1}{n^3} > 0$ et donc :

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Or $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ et $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc :

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$$