

DEVOIR MAISON 11

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

2. Déterminer une primitive, sur un ensemble à préciser, de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Exercice 2.

On pose $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Factoriser le polynôme $P - P(0)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2 et P_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$$

5. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, les racines de P_n , puis factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$ comme produit de polynômes irréductibles sur \mathbb{C} .