

DEVOIR MAISON 10

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_0 = I_2, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, pour tout entier naturel n , on pose :

$$A_{n+2} = A_{n+1}A_n$$

1. Calculer explicitement les matrices A_2 et A_3 .

2. **Calcul des puissances de la matrice A**

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un nombre réel x_n tel que :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer l'expression de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Quel est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2.

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

1. En la convexité ou la concavité d'une fonction classique, montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

2. Soit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) En utilisant la question précédente, montrer que :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leq \frac{1}{p} \times \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \times \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

(b) Conclure que :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$