

DEVOIR MAISON 10

un corrigé

Exercice 1.

1. On a :

$$A_2 = A_1 A_0 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$A_3 = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On utilise une récurrence double. Pour tout entier naturel n , on considère l'assertion :

$$\mathcal{P}_n : \ll \exists x_n \in \mathbb{R}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gg$$

★ Les assertions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies ; les nombres $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ conviennent.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A_{n+2} = A_{n+1} A_n = \begin{pmatrix} 1 & x_{n+1} + x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'assertion $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in \mathbb{R}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On a établi dans la récurrence précédente que $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $t^2 - t - 1 = 0$ a pour racines :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = A\varphi^n + B\psi^n$$

La résolution du système formé par les équations $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ fournit les valeurs :

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

4. Comme $-1 < \psi < 0$ et $\varphi > 1$, on a :

$$\psi^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{5}} > 0$, les opérations sur les limites nous donnent :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}$$

Exercice 2.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On sait que la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ sont des nombres positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc :

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \times \ln(a) + \frac{1}{q} \times \ln(b)$$

Or :

$$\frac{1}{p} \times \ln(a) + \frac{1}{q} \times \ln(b) = \ln(a^{1/p}) + \ln(b^{1/q}) = \ln(a^{1/p} b^{1/q}) = \ln(\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b})$$

donc l'inégalité précédente se réécrit :

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \ln(\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b})$$

La croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ entraîne alors que :

$$\boxed{\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}}$$

2. (a) Soit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a = \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} \in \mathbb{R}_+^*$ et $b = \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q} \in \mathbb{R}_+^*$ donc, d'après la question précédente appliquée avec les nombres a et b , on a :

$$\left(\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p}\right)^{1/p} \left(\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p} \times \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \times \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

c'est-à-dire, puisque $(a_1^p)^{1/p} = a_1$ et $(b_1^q)^{1/q} = b_1$,

$$\boxed{\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leq \frac{1}{p} \times \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \times \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}}$$

- (b) On peut montrer, de la même manière, que :

$$\frac{a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leq \frac{1}{p} \times \frac{a_2^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \times \frac{b_2^q}{b_1^q + b_2^q}$$

En ajoutant terme à terme les deux dernières inégalités, il vient :

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et donc, en multipliant par $\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q} > 0$, on a bien :

$$\boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}}$$