Devoir Maison 10

un corrigé

Problème.

Partie I : inégalités préliminaires

1. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g'(x) = \mathrm{e}^x + (x-2)\,\mathrm{e}^x + 1 \qquad \text{et} \qquad g''(x) = 2\,\mathrm{e}^x + (x-2)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x \geqslant 0$$

Par ailleurs, $g'(0) = g(0) = 0$ donc on en déduit le signe de g' et le tableau de variation de g suivants :

x	0	$+\infty$
g'	0 $\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	0 $\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc $g(x) \geqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons :

$$u'(t) = \mathrm{e}^t \qquad\qquad v(t) = x - t$$

$$u(t) = \mathrm{e}^t \qquad\qquad v'(t) = -1$$

Comme $u, v \in \mathscr{C}^1([0,x], \mathbb{R})$ (ces fonctions étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), la formule d'intégration par parties nous donne :

$$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(x-t)\,\mathrm{e}^t\Big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -x + \Big[\mathrm{e}^t\Big]_0^x = \mathrm{e}^x - 1 - x$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}$$

(b) Soit $t \in [0,x]$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$. En multipliant par $x - t \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall t \in [0,x], \qquad x - t \leqslant (x-t)\,\mathrm{e}^t \leqslant (x-t)\,\mathrm{e}^x$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t,$$

ou encore, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{e}^{\,x}$$

Or :

$$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{x^2}{2} \leqslant \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{\,x}$$

En ajoutant $1+x$ et en utilisant l'égalité démontrée à la question précédente, on obtient bien les inégalités souhaitées :

$$\boxed{1+x+\frac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^{\,x} \leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{\,x}}$$

Partie II : propriétés de la fonction f

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Il reste à étudier la continuité de f en 0. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 et :

$$\frac{\mathrm{e}^{\,x}-\mathrm{e}^{\,0}}{x-0} = \frac{\mathrm{e}^{\,x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = \mathrm{e}^{\,0} = 1$$

donc :

$$f(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\,x}-1}{x}\right)^{-1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 = f(0)$$

Ainsi, f est également continue en 0. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\boxed{\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}-1}-1}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\,x}-1} - \frac{1}{x}}$$

D'après la question 2.(b), on a :

$$0 < x + \frac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^{\,x} - 1 \leqslant x + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{\,x}$$

donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{\,x}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{\,x}-1} \leqslant \frac{1}{x+\frac{x^2}{2}} \qquad \textit{i.e.} \qquad \frac{2}{2x+x^2\,\mathrm{e}^{\,x}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{\,x}-1} \leqslant \frac{2}{2x+x^2}$$

On en déduit que :

$$\frac{2}{2x+x^2\,\mathrm{e}^{\,x}} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant \frac{2}{2x+x^2} - \frac{1}{x}$$

Or :

$$\frac{2}{2x+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x-(2x+x^2)}{x(2x+x^2)} = -\frac{x^2}{x^2(2+x)} = -\frac{1}{2+x}$$

et :

$$\frac{2}{2x+x^2\,\mathrm{e}^{\,x}} - \frac{1}{x} = \frac{2x-(2x+x^2\,\mathrm{e}^{\,x})}{x^2(2+x\,\mathrm{e}^{\,x})} = -\frac{\mathrm{e}^{\,x}}{2+x\,\mathrm{e}^{\,x}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad -\frac{\mathrm{e}^{\,x}}{2+x\,\mathrm{e}^{\,x}} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant -\frac{1}{2+x}}$$

(b) On a :

$$-\frac{1}{2+x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\mathrm{e}^{\,x}}{2+x\,\mathrm{e}^{\,x}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$

puis :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-\mathrm{e}^x + (1-x)\,\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x - 1)^2 - 2\,\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)\big((1-x)\,\mathrm{e}^x - 1\big)}{(\mathrm{e}^x - 1)^4} \\ &= \frac{-x\,\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) - 2\,\mathrm{e}^x\,\big((1-x)\,\mathrm{e}^x - 1\big)}{(\mathrm{e}^x - 1)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}\big[-x\,\mathrm{e}^x + x - 2(1-x)\,\mathrm{e}^x + 2\big] \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}\big[(x-2)\,\mathrm{e}^x + x + 2\big] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = \frac{g(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}}$$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} &= \frac{1 - x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x\,(1 - \mathrm{e}^{-x})^2} \qquad \text{(en factorisant par } \mathrm{e}^x\text{)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{(1 - \mathrm{e}^{-x})^2} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\mathrm{e}^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et, par croissances comparées, $x\,\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc on a bien :

$$\boxed{f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0$ (croissante stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) donc $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ puis $(\mathrm{e}^x - 1)^3 > 0$. Par ailleurs, les fonctions g et exp sont positives sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question 1. pour la fonction g). On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) \geqslant 0$, d'où le tableau de variation de f suivant :

x	0		$+\infty$
f'	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$ donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}}$$

Partie III : étude d'une suite

7. Comme $f(0) = 1 \neq 0$, il est clair que 0 n'est pas un point fixe de f. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x \iff \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x &\iff \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 \qquad \text{(car } x \neq 0\text{)} \\ &\iff \mathrm{e}^x - 1 = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un unique point fixe dans } \mathbb{R}_+, \text{ à savoir } \ln(2)}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $|f'|$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2} \times |x - y|$$

En appliquant cette inégalité aux points $u_n \in \mathbb{R}_+$ et $\ln(2) \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|f(u_n) - f(\ln(2))| \leqslant \frac{|u_n - \ln(2)|}{2}$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\ln(2)) = \ln(2)$ d'après la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \frac{|u_n - \ln(2)|}{2}}$$

9. On procède par récurrence.
   - ⋆ Comme $u_0 = 0$, l'inégalité est vraie au rang 0 (les deux membres valant $\ln(2)$).
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n - \ln(2)| \leqslant \dfrac{\ln(2)}{2^n}$. D'après la question précédente, on a :

   $$|u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{\ln(2)}{2^n}$$

   par hypothèse de récurrence. Ainsi, $|u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \dfrac{\ln(2)}{2^{n+1}}$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ln(2)| \leqslant \frac{\ln(2)}{2^n}}$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-\frac{\ln(2)}{2^n} \leqslant u_n - \ln(2) \leqslant \frac{\ln(2)}{2^n} \qquad \text{puis} \qquad \ln(2) - \frac{\ln(2)}{2^n} \leqslant u_n \leqslant \ln(2) + \frac{\ln(2)}{2^n}$$

Or $\ln(2) \pm \dfrac{\ln(2)}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est convergente de limite } \ln(2)}$$

11. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Le terme u_n fournit une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près si $\dfrac{\ln(2)}{2^n} \leqslant \varepsilon$. En effet, si cette inégalité est vraie, alors les inégalités de la question 9. et la transitivité de la relation $\leqslant$ impliquent que $|u_n - \ln(2)| \leqslant \varepsilon$.

    Pour calculer u_1, il ne faut pas oublier que l'image de 0 par f est $f(0) = 1$.

```
from math import log, exp

def suite(n) :
     if n == 0 :
          return 1
     u = 1 #valeur de u_1
     for k in range(n-1) : #il faut n-1 tours de boucles pour obtenir u_n
          u = u/(exp(u)-1)
     return u

# sachant que log(2) <= 1

def approx(eps) :
     n = 0
     while 1/2**n > eps :
          n = n+1
     return suite(n)
```