Devoir Maison 10

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Problème.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^x + x + 2$$

Partie I : inégalités préliminaires

1. Montrer que la fonction g est positive sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que :
   $$1 + x + \frac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x$$
   Indication : on utilisera la propriété de croissance de l'intégrale rappelée dans le deuxième problème du dernier devoir surveillé.

Partie II : propriétés de la fonction f

3. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que :
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x}$$
   puis établir les inégalités suivantes :
   $$-\frac{\mathrm{e}^x}{2 + x\,\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant -\frac{1}{2+x}$$
   Indication : on utilisera la question 2.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
   Remarque : on pourrait également montrer que f' est continue en 0 (admis).
5. Vérifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = \frac{g(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}$$

6. Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ puis en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

Partie III : étude d'une suite

On définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite u est positive car $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

7. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de f sur $\mathbb{R}_+$.
8. En utilisant la question 6., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \frac{|u_n - \ln(2)|}{2}$$

9. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ln(2)| \leqslant \frac{\ln(2)}{2^n}$$

10. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite u.
11. Écrire une fonction informatique `approx(eps)` qui prend en argument un nombre réel strictement positif `eps` et qui renvoie une valeur approchée `x` de $\ln(2)$ à `eps` près.

Définition (valeur approchée) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'un nombre réel x est une valeur approchée de α à ε près si $|x - \alpha| \leqslant \varepsilon$.